UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

DOCTORADO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

SIGNIFICADOS PARA LA ENSEÑANZA QUE POSEEN PROFESORES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICA SOBRE EL CONCEPTO DE PENDIENTE

TESIS

Para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

PRESENTA

M. en C. José Luis Sánchez Santiesteban

DIRECTORES DE LA TESIS

Dr. José María Sigarreta Almira

Dr. Crisólogo Dolores Flores

Chilpancingo de los Bravos, Guerrero, agosto del 2021

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el beneficio de la beca otorgada para realizar mis estudios doctorales.

Quiero agradecer de manera especial a mi Amigo y director de esta tesis, al Dr. José María Sigarreta Almira por sus atinadas orientaciones, así como por todo el apoyo y la confianza que en cada momento depositó en mí para la realización de este proyecto. Al Dr. Crisólogo Dolores Flores por invitarme a trabajar en uno de sus temas de investigación y por sus acertadas orientaciones en el ámbito de la investigación.

A toda mi familia que tanto me han apoyado en la realización de mis proyectos.

Al claustro de profesores del Doctorado en Matemática Educativa que han aportado de manera significativa a mí formación profesional.

AGRADEZCO DE CORAZÓN A TODOS LOS QUE HAN HECHO POSIBLE, DE UNA FORMA U OTRA, EL DESARROLLO DE ESTA INVESTIGACIÓN.

Tabla de Contenidos

Resumen

En esta investigación se estudia el significado para la enseñanza en el sentido de Thompson (2013), esencialmente este significado *se centra en lo que la persona intenta transmitir a través de una expresión y lo que la persona imagina que se transmite, cuando escucha un enunciado.* En el Capítulo I se expone la fundamentación del problema de investigación, las preguntas científicas, así como los métodos y técnicas de investigación empleados. El Capítulo II aborda un estado del arte sobre el concepto de pendiente donde se analizan y sintetizan las principales investigaciones sobre el tema objeto de estudio.

El Capítulo III se ocupa del estudio epistemológico de la noción de pendiente, su relación con la recta tangente a una curva y en general con la línea tangente en un punto de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Se comienza con un breve estudio sobre hechos básicos de la pendiente para luego ver su evolución en relación con el concepto de tangente a curvas diferenciables clásicas, hasta desarrollos matemáticos más profundos asociados con la Teoría Geométrica de la Medida. En el Capítulo IV se presenta una estrategia, para el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente; conformada por tres etapas: la elaboración de los instrumentos para la recogida de información, la aplicación de los instrumentos y el análisis de la información recolectada para identificar, clasificar y valorar los significados. Esta estrategia explora la coherencia entre lo que el profesor intenta transmitir, lo que imagina que transmite y lo que su interlocutor (el estudiante) concibe que se transmite.

En el Capítulo V se valida la estrategia para el estudio de los significados para la enseñanza; el cual se dividió en dos epígrafes: –en el primero, se analiza la factibilidad de la estrategia propuesta para el estudio de los significados para la enseñanza asociada con la calidad estructural y funcional de los componentes instrumentales de la estrategia, en tal dirección se presenta un estudio de su evaluación ante un panel de expertos, –el segundo epígrafe explora el grado en que se manifiestan los significados analítico, algebraico, geométrico y contextual del concepto de pendiente en profesores universitarios de matemáticas. Para el análisis y valoración de los resultados nos apoyamos desde el punto de vista matemático en la técnica para la representación del ordenamiento por similitud, respecto a la solución ideal. Finalmente, el Capítulo VI se ocupa de las conclusiones de la investigación.

Capítulo I. Introducción

La formación de las nuevas generaciones es un objetivo prioritario, demandado por toda la sociedad y a los educadores, en general les corresponde una altísima cuota en el cumplimiento de dicho objetivo y de una manera singular, a los profesores encargados de dirigir el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática en las escuelas. Tomando en consideración la posición preponderante que ocupa la Matemática en el proceso de enseñanza–aprendizaje y el papel que juega en la formación integral de los estudiantes; somos del criterio que los significados que poseen los profesores sobre los conceptos matemáticos, constituyen una herramienta esencial para su labor profesional y por consiguiente en la formación de las nuevas generaciones.

En la actualidad, una línea de investigación en Matemática Educativa está dirigida a la formación de profesores, en particular, al estudio de los significados para la enseñanza que poseen los mismos; donde se considera a estos significados como base esencial para el desarrollo de su actividad docente (Keitel y Kilpatrick, 2005; Howson, 2005; Thompson, 2013; Fernández Plaza, et al., 2016; Byerley y Thompson, 2017). En la misma dirección, nuestro interés de investigación se centra, en lo fundamental, en los significados que los docentes poseen para hacer efectivo el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente.

Contreras (2009) afirma que se pueden extraer muchas conclusiones de estudios internacionales como PISA, TIMS, etcétera. Ya que los mismos son portadores de un mensaje sobre la formación de los estudiantes, sobre las competencias que los profesores hemos conseguido que desarrollen y de las que no hemos sido capaces de poner en juego. Y es en eso en lo que creo que debemos incidir y dedicar esfuerzos. Por ello, debemos mejorar nuestro conocimiento sobre los profesores de matemática, sobre su formación, su práctica y su pensamiento. (p 12).

Coincidimos con Contreras (2009) en que dentro de los elementos, a tener en cuenta, de suma importancia para trazar estrategias de mejoras, en el proceso de enseñanza–aprendizaje y que estas tengan el éxito esperado; está asociado con el conocimiento integral del profesor de matemática y en particular, con los significados que posee sobre los conceptos matemáticos involucrados en su proceso de enseñanza–aprendizaje; ya que los significados matemáticos condicionan la manera en que nos enfrentamos a los problemas; aunque son de naturaleza esencialmente cognitiva, están en relación con la experiencia, con la información obtenida y/o recibida.

Los significados orientan y regulan el estilo personal de enseñar, la toma de decisiones durante el proceso de enseñanza–aprendizaje, las variantes metodológicas en relación con el contenido de enseñanza, los componentes no personales del proceso de enseñanza–aprendizaje (objetivo, contenido, métodos, medios, evaluación), así como las diferentes interacciones que se dan en el mismo, es decir, la relación profesor–alumno y alumno–alumno (Copur–Gencturk, 2015; Zaslavsky, 1987 y Thompson, 2013). Así, la labor que realizan los profesores con los estudiantes en los salones de clases es guiada, en gran medida, por los significados que estos poseen acerca de los conceptos matemáticos y su enseñanza–aprendizaje.

Los conceptos son un contenido que reviste gran importancia en la formación del conocimiento matemático, ver (Tall y Vinner (1981); Vinner (1994); Thompson (1994a); Walter y Gerson (2007); Delgado, Trujillo, Castro y Guerrero (2010); Fernández Plaza et al. (2016)). Las investigaciones desarrolladas por los autores antes mencionados, han centrado sus esfuerzos en determinar cómo y cuáles son los procesos y métodos más efectivos, para favorecer su enseñanza–aprendizaje. Investigaciones han demostrado que los conceptos que se tratan en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la matemática en la escuela, adquieren una variedad de significados que van más allá de los concebidos en el currículo y lo que se enseña, situación que hace más complejo dicho proceso (Azcárate, 1992; Thompson 1994[a]; Steinbring 2006, Radford, 2006; Teuscher y Reys, 2010; Thompson, 2016; Byerley y Thompson, 2017).

Hitt (2001) plantea, que deben proponerse diferentes sistemas de representación para formar un concepto, determinando tres tipos de registro: coloquial, gráfico y algebraico/*numérico.* Dichos registros sirven de base para estudiar los significados que poseen los profesores, sobre un determinado concepto, ya que los mismos están relacionados directamente con el contexto o el área de la matemática en que se puede operar con el significado de dicho concepto. Por otro lado permitirá clasificar los significados que poseen los profesores del concepto objeto de estudio, de acuerdo al contexto.

Tall y Vinner (1981), Sfard (1991), Vinner (1994), Balacheff (1998), Duval (1998), Biehler (2005), Akkoc (2008), Fernández (2015), entre otros; han sentado las bases para una teoría sobre los conceptos matemáticos, basados, en lo fundamental, en la distinción entre la definición de concepto y su imagen; entronando así la importancia de los sistemas de representación en la formación y adquisición de estos. Existen otros importantes trabajos desarrollados en la misma dirección ver a Thompson (1994), García, Azcárate y Moreno (2006), Nagle, Moore–Russo, Viglietti, y Martin (2013a), Byerley y Thompson (2017), entre otros.

El concepto de pendiente está estrechamente relacionado con otros conceptos matemáticos esenciales, a título de ejemplo, cabe mencionar: medida y razón de cambio. Dicha relación conceptual se pone de manifiesto en la escuela, al presentar el concepto pendiente de una línea recta como la tangente del ángulo de inclinación, ángulo que forma la recta orientada hacia arriba con el semieje positivo horizontal, o como el cociente de la variación que se produce en los valores en el eje vertical con respecto a la variación de los valores en el eje horizontal. O de manera funcional como la medida relativa de los cambios que se producen en una magnitud con relación a otra.

El contenido referido a la pendiente es medular dentro de los diferentes programas de estudio a nivel internacional; pero lo que reflejan las investigaciones (Thompson,1994; Hauger, 1998; Park, Jang, Chen y Jung, 2011; Nagle y Moore–Russo, 2014; Byerley y Thompson, 2017; Nagle et al., 2019) sobre este concepto, es que se trabaja o prioriza, esencialmente, el significado numérico–cuantitativo, o sea se aborda el concepto desde una perspectiva procedimental y no se atiende adecuadamente el aspecto cualitativo–relacional, el cual favorece que los estudiantes construyan un significado más acabado del concepto. La sobredimensión del tratamiento numérico de un determinado concepto, limita su alcance y por consiguiente la utilización en otros contextos; los estudiantes no pueden establecer relaciones entre los conceptos estudiados (Teuscher y Reys, 2010; Suh y Fulginiti, 2011; Moore–Russo, Conner y Rugg, 2011a; Dolores, García y Gálvez, 2017).

Estudios evidencian la existencia de múltiples dificultades, como por ejemplo: la incapacidad de escribir la ecuación de una recta dada la pendiente y un punto (Habre y Abboud, 2006); tampoco los estudiantes hacen distinción entre una tasa de cambio positiva y una negativa. Además, no son capaces de relacionar los conceptos de pendiente, tasa de cambio e inclinación (Teuscher y Reys, 2010), existe confusión con respecto a la conexión entre los aspectos algebraicos y geométricos de la pendiente (Zaslavsky et al., 2002), no saben de dónde proviene la fórmula de pendiente y la calculan de manera incorrecta, por ejemplo: $\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$, $\frac{y_2-x_2}{y_1-x_1}$ (Cho y Nagle, 2017). Los resultados antes expuestos ponen de manifiesto, que los estudiantes aún no logran una correcta comprensión del concepto de pendiente.

Las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la pendiente, es tema de investigación en la actualidad, en lo fundamental, por la importancia de este concepto como base para desarrollar otros conceptos matemáticos avanzados. Vinner (1994) sostiene que el profesor desempeña un papel fundamental en el proceso de formación de significados en los estudiantes. Además, el estudio desarrollado por Park et al. (2011) le permitió concluir que cuando los profesores tienen significados robustos sobre los conceptos que enseñan, los estudiantes evidencian un pensamiento que se aproxima a la definición formal del concepto. Por lo tanto, una vía para el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, es poner énfasis en los significados asociados a los conceptos matemáticos que poseen los profesores, en particular el de pendiente.

Las investigaciones sobre los significados asociados con el concepto de pendiente, en profesores de diferentes niveles educativos, ponen de manifiesto que es un tema de gran importancia para el desarrollo con éxito del proceso de enseñanza–aprendizaje de dicho concepto (Byerley y Thompson, 2017; Deniz y Kabael, 2017; Díaz, 2013; Nagle et al., 2013a; Coe, 2007; Stump, 2001; Thompson, 1994a). Así mismo, dichas investigaciones aseveran que los estudiantes tienen los mismos significados que sus profesores, de lo que se puede inferir que existe una relación directa respecto a la transmisión de los significados de los profesores a sus estudiantes.

A partir del análisis de la literatura sobre la pendiente, podemos aseverar que la gran mayoría de las investigaciones se han dirigido, esencialmente, hacia los estudiantes. Por ejemplo, las desarrolladas por (Teuscher y Reys, 2010; Birgin, 2012; Nagle y Moore–Russo, 2014; Rivera y Dolores, 2017; Deniz y Kabael, 2017; Cho y Nagle, 2017; Dolores, Rivera y García, 2018). No obstante, existen otros trabajos que han considerado la comprensión del concepto de pendiente en los profesores de matemáticas en formación y los profesores en ejercicio (Stump, 1999; Stump, 2001a; Coe, 2007; Walter y Gerson, 2007; Mudaly y Moore–Russo, 2011; Nagle y Moore–Russo, 2014a; Nagle, Moore–Russo, y Styers, 2017; Byerley y Thompson, 2017). Las investigaciones antes mencionadas ponen de manifiesto la necesidad de profundizar en los elementos didáctico–instrumentales, para explorar de forma integral los significados que poseen los profesores de matemática, con respecto al concepto de pendiente.

Fernández Plaza et al. (2016) afirman que comprender un concepto matemático es dotarlo de significado, es decir, conocer su definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, su interpretación y aplicación. Esta aseveración está directamente relacionada con la idea de significado de un concepto matemático, de Frege (1998) quien la estructura teniendo en cuenta los siguientes elementos: los signos, gráficos y las nociones que lo representan. Sin apartarse de las ideas básicas de Frege, (Rico, 2012) considera un elemento importante a tener en cuenta para el estudio del significado; para dicho autor el significado está conformado por la estructura conceptual, las representaciones y la fenomenología.

El significado de conceptos ha sido estudiado desde la perspectiva cognitiva, es decir, asociado a los conocimientos matemáticos que poseen los profesores sobre un determinado concepto (Stump, 2001; Zaslavsky, Sela y Leron, 2002; Moore–Russo, Conner y Rugg, 2011a; Hoffman, 2015; Cho y Nagle, 2017). Además, es analizado desde la perspectiva didáctico–institucional, esencialmente, sustentado en un enfoque semiótico (Montenegro et al., 2011; Martin, Ruíz y Rico, 2016). Byerley y Thompson (2017) y Thompson (2016) proponen un enfoque holístico para el estudio de los significados, para la enseñanza a partir de lo que el profesor *intenta transmitir*, lo que *imagina que se transmite* y lo que el *interlocutor* (estudiante) *concibe que se está transmitiendo*. Estos investigadores han centrado sus estudios, esencialmente, en los dos primeros elementos de esta terna; en esta dirección para valorar los significados para la enseñanza integramos el tercer elemento, el interlocutor.

Los estudios sobre la pendiente muestran el alto grado de dificultad que encierra este concepto, en buena medida esto se debe a la variedad de significados que se le asignan, tanto en la teoría como en la práctica (Stump, 1999; Zaslavsky et al., 2002; Moore–Russo, Conner y Rugg, 2011a; Mudaly y Moore–Russo, 2011; Nagle y Moore–Russo, 2013; Nagle, Moore–Russo y Styers 2017; Deniz y Kabael, 2017, Rivera, Salgado y Dolores, 2019; Nagle, Martínez–Planell y Moore–Russo, 2019). Cabe destacar que los investigadores en función de favorecer el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente, han identificado diferentes representaciones de la misma asociada a determinados contextos (conceptualizaciones), en particular Stump (1999); Stump (2001a) y Moore–Russo et al. (2011a) quienes determinaron y refinaron las hasta ahora conocidas: la razón algebraica o geométrica, propiedad funcional, de situaciones del mundo real, como indicador de comportamiento, como propiedad física, en forma de coeficiente paramétrico, trigonométrica, analítica, propiedad determinante, como constante lineal.

Esta dispersión conceptual ha resultado útil para identificar la diversidad de significados, así como errores en las formas de razonamientos. Por ejemplo, Rivera et al. (2019) reportan que en algunos casos los alumnos confunden los conceptos de pendiente con la recta misma, o bien desconexión entre aspectos geométricos y variacionales. En gran medida estos hechos constituyen el resultado de carencias en el proceso de enseñanza. Walter y Gerson (2007) plantean que las dificultades en la comprensión del concepto de pendiente, pueden estar condicionadas por los diversos significados que los profesores le asocian a dicho concepto (inclinación, declive, empinada, talud, entre otras). Estos autores también sostienen que el énfasis en la representación asociada con la expresión intuitiva de "subida vs. avance" ha contribuido a las dificultades de los estudiantes para establecer conexiones entre la pendiente, la posición de la línea recta y la razón de cambio, entre otros aspectos. Por su parte, Nagle et al. (2017) reportan que algunos profesores, al referirse a situaciones físicas, lo hacen sin prestar atención explícita a la conexión entre la pendiente y la inclinación.

De forma general, los estudios reconocen la complejidad que entrañan los mecanismos tanto teóricos como empíricos empleados para captar los significados para la enseñanza, que posee el profesor sobre la pendiente. Así, para explorar los significados que poseen los profesores universitarios de Matemática, respecto al concepto de pendiente; asumiremos como una de nuestras bases teóricas las ideas desarrolladas por Thompson y sus colaboradores, sobre el significado para la enseñanza de los conceptos matemático; ya que dichos resultados integran los elementos desarrollados por las investigaciones anteriores (Tall y Vinner, 1981; Radford, 2002a; Radford, 2002b; Radford, 2006; Steinbring, 2006; Sofronas, Vinsonhaler, Gorgievski, Schroeder, y Hamelin, 2011).

En tal sentido Thompson (2013) afirma, que cualquier posición que ponga el significado fuera de la experiencia personal contextual, es menos útil para los propósitos del diseño curricular e instruccional, la preparación del profesor y el desarrollo profesional, que una posición que pone el significado en las personas. Así, sus investigaciones exploran el significado centrado en las personas, es decir, cada persona construye sus propios significados en función de sus conocimientos previos, experiencias y en relación directa con el contexto en que desarrolla su actividad. Por lo tanto, coincidimos con Thompson (2013) *cuando plantea, que el significado se centra en lo que la persona intenta transmitir a través de una expresión y lo que la persona imagina que se transmite, cuando escuchan un enunciado.*

Los estudios sobre la pendiente, se han desarrollado a baja escala y en una sola dirección (instruccional–institucional) por lo tanto sus alcances son limitados y parciales; por lo que se hace necesario que las investigaciones a partir del desarrollo teórico–práctica actual, se centren en el estudio de los significados, la determinación de las causas que provocan las dificultades, los obstáculos y en la elaboración y/o utilización de estrategias didácticas, que favorezcan el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente. Diamond (2019) plantea que para avanzar en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente, existe la necesidad de sintetizar y analizar los resultados de las investigaciones existentes sobre la pendiente, así mismo explica la importancia de una estrategia general que permita estudiar los significados.

Además, las investigaciones recientes han alertado acerca de la necesidad de un abordaje holístico, cuando se trata de estudiar el significado para la enseñanza que poseen los profesores de Matemáticas (Thompson, 2013 y 2016). En el caso particular del concepto de pendiente, ello se expresa en forma de un proceso de comunicación matemática, donde *lo que intenta transmitir,* lo que *imagina que se transmite* y lo que el *interlocutor* (estudiante) *concibe que se está transmitiendo,* resultan elementos vitales para una comprensión más objetiva de la enseñanza y del aprendizaje (Byerley y Thompson, 2017). Este enfoque holístico también constituye un referente para la elaboración de actividades e instrumentos que faciliten la identificación, el análisis y la valoración de los significados para la enseñanza de la pendiente que poseen los profesores.

Nuestro trabajo se centra en la concepción de una estrategia, enfocada hacia el estudio de los significados para la enseñanza del concepto de pendiente en profesores de matemáticas. La base epistémica fundamental que sustenta esta estrategia reside, en el enfoque desarrollado por Thompson y sus colaboradores, de manera que el significado de pendiente requiere de la identificación de un conocimiento matemático (el qué), de la percepción subjetiva del docente respecto a cómo ello se transmite (el cómo) y el reflejo de este proceso de enseñanza en el aprendizaje (la aprehensión del estudiante, en el sentido de lo que concibe que se está transmitiendo). De manera especial, una estrategia enfocada hacia tales propósitos, requiere de instrumentos de diagnóstico que permitan identificar, clasificar y valorar los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente.

En relación con lo anteriormente expuesto, nos proponemos resolver el siguiente problema de investigación:

¿Qué significados para la enseñanza poseen los profesores universitarios de Matemática sobre el concepto de Pendiente?

En correspondencia con el problema de investigación se derivó el siguiente objetivo de investigación: Elaborar una estrategia para favorecer el estudio de los significados para la enseñanza en profesores universitarios de Matemática sobre el concepto de Pendiente.

En función del logro del objetivo se formularon las siguientes preguntas científicas:

1. ¿Qué elementos didácticos son necesarios para estudiar los significados para la enseñanza que poseen los profesores universitarios de Matemática sobre el concepto de Pendiente?
2. ¿Qué fundamentos epistemológicos son necesarios para investigar los significados para la enseñanza que poseen los profesores universitarios de Matemática en relación con la Pendiente?
3. ¿Qué elementos metodológico–instrumentales son necesarios para identificar, clasificar y valorar los significados para la enseñanza que poseen los profesores universitarios de Matemática sobre el concepto de Pendiente?

En función de dar cumplimiento al objetivo y en particular, para responder a las preguntas científicas planteadas fueron propuestas las siguientes tareas de investigación:

- Determinar el estado del arte asociado al concepto de pendiente.

- Elaborar y aplicar los instrumentos de investigación que permitan identificar, clasificar y valorar los significados para la enseñanza que poseen los docentes universitarios acerca de la pendiente.

- Elaborar una estrategia en función de estudiar los significados para la enseñanza que sobre el concepto de pendiente poseen profesores universitarios de matemática.

Para llevar a cabo esta investigación se utilizaron los siguientes métodos de investigación:

- El análisis de fuentes, para constatar el estado del arte y sentar las bases teóricas que sustentan la investigación.

- El método histórico–lógico, para estudiar la evolución y desarrollo que ha tenido el problema de investigación.

- El análisis y la síntesis, para estudiar los diferentes aspectos que integran los significados para la enseñanza.

- El método del enfoque sistémico, para analizar la relación sistémica de los elementos de la estrategia para el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los docentes sobre el concepto objeto de estudio (pendiente).

Las técnicas de investigación fueron las siguientes:

Se utilizó la encuesta, la entrevista basada en tareas y una entrevista colectiva como métodos para la recolección de datos. En particular Goldin (2000) asevera que: “Las entrevistas basadas en tareas para el estudio del comportamiento matemático involucran, como mínimo, un sujeto (el que resuelve problemas) y un entrevistador (el investigador), que interactúan en relación con una o más tareas (preguntas, problemas o actividades) presentadas al sujeto por el entrevistador de manera planeada”.

La aplicación de los métodos empíricos, antes mencionados, permitieron (Identificar, clasificar y valorar) los significados para la enseñanza que poseen los profesores universitarios de matemática sobre el concepto de pendiente. El sistema de actividades desarrollado tiene como objetivo estimular la producción de significados del concepto de pendiente; a partir de las propiedades esenciales de dicho concepto, su interpretación contextual, las relaciones entre las diferentes representaciones.

La encuesta se estructuró, en función de abarcar la mayor variedad de aspectos conceptuales, procedimentales y contextuales en relación con el concepto de pendiente. Las tareas que se emplearon las clasificamos en tareas directas (son aquellas que en el enunciado se explicita el concepto que se investiga) y tareas indirectas (son aquellas que el concepto a estudiar no se explicita en la actividad a desarrollar).

La entrevista grupal se diseñó para profundizar en los elementos que conforman los significados para la enseñanza; así como integrar y sistematizar la información obtenida de los otros dos instrumentos.

Con el fin de analizar la calidad estructural y funcional del componente instrumental de la estrategia, se diseñó un estudio piloto y se sometió a evaluación ante un panel de expertos. Los resultados se procesaron con ayuda de una técnica para la representación del ordenamiento por similitud, respecto a la solución ideal (TOPSIS), basada en datos difusos.

Capítulo II. El concepto de pendiente: estado de la investigación y prospectivas didácticas.

En las últimas dos décadas han proliferado las investigaciones sobre el concepto de pendiente que, si bien en su mayoría atendían al estudio teórico de las conceptualizaciones, a través de ellas abordaban también la estructuración del contenido y los obstáculos asociados al proceso de enseñanza–aprendizaje de dicho concepto. En este capítulo se analizan y sintetizan las principales investigaciones que tratan la pendiente, así como se da noticia de alguno de sus resultados. Finalmente, se plantean posibles prospectivas para las investigaciones sobre el concepto de pendiente.

II.1 Contextualización de las investigaciones sobre el concepto de pendiente

El concepto de pendiente se considera esencial en la formación matemática de los estudiantes, fundamentalmente, porque es base de otros conceptos importantes dentro de la matemática elemental y superior. Este concepto, está presente en los currículos de matemáticas de la enseñanza media y superior de todos los países y es objeto de estudio, de manera formal, a partir del nivel de secundaria (Teuscher y Reys, 2010, 2012; Nagle et al., 2013a; Hoffman, 2015; Rivera y Dolores, 2017; Deniz y Kabael, 2017; Beyerley y Thompson, 2017). Las variantes más utilizadas para introducir el concepto de pendiente en la escuela la asocian o bien con el comportamiento de la recta o bien con la idea de razón de cambio. En el primer caso, se trabaja simultáneamente con las funciones lineales o a partir de situaciones del mundo real (Carlson et al., 2002; Teuscher y Reys, 2010, 2012; Birgin, 2012) y, en el segundo, relacionándola con los elementos básicos de las razones y las relaciones proporcionales (Turner, Wilhelm y Confrey, 2000).

En cualquier caso, Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990 consideran que la pendiente es un “concepto de enlace poderoso” porque ayuda a los estudiantes a comprender las funciones y sus gráficas. En este sentido Niss, Blum, y Galbraith (2007) refieren una importante dualidad. Por un lado, se pone de manifiesto la modelación, en la dirección “realidad $\rightarrow$ matemática”, o sea, un problema del contexto real motiva la utilización del concepto de pendiente, lo cual enfatiza el proceso. Por otro lado, se expresa la relación inversa “matemática $\rightarrow$ realidad”, donde se enfatiza el objeto matemático de pendiente en el sentido de buscar sus aplicaciones.

Otro elemento que pone de manifiesto la importancia del concepto de pendiente es que permite explorar con mayor facilidad las funciones de dos variables ($f(x,y) = k$) con covariación no constante al compararlas con la característica de pendiente constante de las funciones lineales (Stanton y Moore–Russo, 2012). El concepto de pendiente se aplica en muchos campos de las ciencias en general y, en particular, es relevante para el desarrollo de temas de matemática avanzada; es fundamental para describir el comportamiento de una curva y juega un papel central en el desarrollo del cálculo (Carlson, Oehrtman y Engelke, 2010; Confrey y Smith, 1995; Noble, Nemirovsky, Wright y Tierney, 2001). El cálculo marca una transición significativa en la comprensión matemática de la pendiente por parte de los estudiantes, pasando de funciones lineales a funciones no lineales y de razón de cambio medio a razón de cambio instantáneo (Dolores, 2007; Teuscher y Reys, 2012; McGee, Moore–Russo y Martínez, 2015).

El concepto de pendiente, al ser tratado como objeto en el proceso enseñanza–aprendizaje encierra una gran complejidad debido a la variedad de significados que se le asocian y que van desde el uso cotidiano o común, pasando por sus aplicaciones, hasta las conceptualizaciones que se han determinado en el proceso de enseñanza–aprendizaje de dicho concepto (Stump, 1999; Zaslavsky, Sela y Leron, 2002; Moore–Russo et al., 2011a; Nagle y Moore–Russo, 2013).

El paso de un análisis global (general) a un análisis local (puntual) en el problema del estudio de una función es esencial para comprender que, en una vecindad muy próxima de un punto, la función se comporta como su recta tangente en ese punto, es decir, las variaciones que tiene una función a partir de un valor determinado, son proporcionales a las de su variable independiente cuando éstas son muy pequeñas. En ese sentido, los trabajos de Asiala et al., 1997; y de Sofronas et al., 2011, contemplan la aproximación lineal como un elemento funcional para el estudio de la pendiente. Además, Sofronas et al., (2011), recogen que la tercera parte de los expertos en cálculo participantes en su estudio, identifican la comprensión de los estudiantes sobre la aproximación lineal como algo fundamental para una comprensión profunda del cálculo de primer año.

A partir de la revisión de la literatura sobre el tema de la pendiente, se puede observar que la producción científica en los últimos años ha crecido de manera significativa y se ha concentrado en tres direcciones principales: estudio de las conceptualizaciones en estudiantes y profesores; los obstáculos y errores que presentan tanto estudiantes como profesores y el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente (Deniz y Kabael, 2017, p. 140); sin embargo, no se ha encontrado ningún estudio general que aglutine las investigaciones sobre dicho tema y marque futuras direcciones en este campo de estudio. La amplitud de tal estudio motiva que este capítulo pretenda sólo reseñar los trabajos más relevantes sobre el concepto de pendiente asociados con las conceptualizaciones en estudiantes y profesores.

Como punto de partida para lograr el objetivo de analizar, sintetizar y clasificar la investigación sobre el estudio de las conceptualizaciones en estudiantes y profesores, nos proponemos las siguientes interrogantes:

1 ¿Cuáles son las principales investigaciones y resultados relativos a la pendiente?

2 ¿Qué perspectivas se pueden establecer para las futuras investigaciones sobre la pendiente?

El estudio de la literatura publicada sobre la pendiente se realizó utilizando como base el método de análisis bibliográfico clásico sugerido por Gómez, Fernando, Aponte y Betancourt (2014). Mismo que consta de las siguientes etapas:

1. Búsqueda de la información. “Para el proceso de investigación bibliográfica se debe contar con material informativo como libros, revistas de divulgación o de investigación científica, sitios Web y demás información necesaria para iniciar la búsqueda. Una búsqueda bibliográfica debe hacerse desde una perspectiva estructurada y profesional. El material que se emplee debe ser reconocido, es decir, aquellos que han sido revisados cuidadosamente por expertos antes de ser publicados”.

2. Organización de la información. “Esta fase consiste en organizar de manera sistemática la documentación encontrada. Se puede realizar tanto de manera básica o detallada. Una manera de organizar la información es por relevancia, distinguiendo los principales documentos de los secundarios. Así se obtiene una estructura o diagrama que permite identificar los pilares del tema bajo estudio. Es necesario definir una estructura para organizar la información de forma jerárquica y la cantidad de datos que se van a incluir en esta (autores, año, resumen, idea principal, etc.)”.

3. Análisis de la información. “La tercera fase es analizar la información ya organizada, indagando sobre cuáles son los documentos más útiles para la temática en estudio. El análisis de la información es la tarea que toma más tiempo en la investigación bibliográfica, ya que con ella se espera identificar el aporte a realizar”. Gómez, et al. (2014, 159–160).

En una primera etapa se realizó una búsqueda en bases de datos importantes como: (WEB of SCIENCE, JCR, SCOPUS, ERIC) con la finalidad de identificar la literatura correspondiente al tema.

Para ello utilizamos como términos de búsqueda: “Pendiente”; “Conceptualizaciones de pendiente”; “Concepciones sobre pendiente”; “Enseñanza–aprendizaje de pendiente”; “Dificultades en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente”; “Obstáculos y errores en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente”. En el mismo sentido se realizó una búsqueda general orientada en las bases de datos antes mencionadas e Internet (actas de congresos sobre Matemática Educativa y a las tesis de posgrado); utilizando en este caso los términos de búsqueda tales como “Conexiones entre conceptualizaciones”, “El concepto de pendiente en el currículo”, “Las conceptualizaciones de pendiente en el currículo”, “Estructuración del contenido sobre pendiente”.

A partir de un proceso de análisis y síntesis de los hallazgos recogidos en la literatura obtenida, la segunda etapa consistió en la organización e identificación de las investigaciones y resultados más representativos así como de los autores más relevantes en dicha temática (ver Tabla 1).

En una tercera etapa se seleccionó la literatura científica más relevantes para nuestra investigación a partir de los resultados del proceso anterior. De esta forma, el cuerpo principal de las investigaciones seleccionadas para la elaboración de este artículo está conformado por 35 artículos de investigación, en su mayoría en idioma inglés. Cabe destacar que dichas investigaciones son mayoritariamente de índole cualitativa.

Tabla 1. Investigaciones más relevantes y significativas sobre la pendiente.

Autor(Año)	Título	Objetivo	Marco teórico fundamental	Hallazgos Fundamentales
Stump, S. (1999)	Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of Slope.	Investigar las definiciones del concepto de pendiente y la comprensión que poseen los profesores de secundaria sobre dicho concepto; así como su conocimiento para la enseñanza.	La teoría de las imágenes conceptuales desarrolla por (Tall y Vinner, 1981). La teoría sobre la comprensión matemática (MKT por sus siglas en Inglés) desarrollado por Shulman (1986).	Las siguientes conceptualizaciones del concepto de pendiente: 1. Razón geométrica. 2. Razón algebraica. 3. Propiedad física. 4. Propiedad funcional. 5. Coeficiente paramétrico. 6. Trigonométrica.

				7. Cálculo. 8. Situación del mundo real.
Zaslavsky, Sela y Leron (2002)	Being sloppy about slope: the effect of changing the scale.	Investigar el efecto en los estudiantes y profesores cuando enfrentan situaciones o tareas sobre la pendiente, analizada bajo un cambio de escala no homogéneo.	Teoría de la interpretación–información gráfica (representativa e iconográfica) desarrollada por (Pimm, 1995). Uso de las TIC´S asociadas a las representaciones analíticas y geométricas de funciones (Yerushalmy, 1991).	La identificación de dos perspectivas sobre la pendiente (Analítica y Visual). Analítica: La pendiente es una propiedad de la función (Ecuación Lineal) y es invariante bajo un cambio de escala no homogéneo Visual: La pendiente es una propiedad de la gráfica de una función lineal y varía bajo un cambio de escala no homogéneo.
Moore–Russo, D., Conner, A., Rugg, K. (2011a).	Can slope be negative in 3–space? Studying concept image of slope through collective definition construction.	Explorar la argumentación, factores del entorno de aprendizaje y las conceptualizaciones de pendiente.	La teoría de las imágenes conceptuales desarrolla por (Tall y Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989). La teoría del co–constructivismo (Valsiner, 1994). Elementos de la argumentación de	Refina y amplia las ocho conceptualizaciones de pendiente dadas por Stump (1999, 2001), añadiendo las conceptualizaciones siguientes: 9. Determinación de la propiedad. 10. Indicador de comportamiento. 11. Constante lineal. Existe preferencia de los estudiantes por el pensamiento algebraico formal por encima del pensamiento geométrico.

			Krummheuer (1995) y de Yackel (2002).	
Nagle, C. y Moore–Russo, D. (2014)	Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards.	Investigar cómo se manifiesta el concepto de pendiente y su estructuración en el currículo de la enseñanza básica.	Conceptualizaciones de pendiente descritas por Stump (1999, 2001a) y Moore–Russo, Connor y Rugg (2011a).	El número total de referencias, a la pendiente, en ambos currículos de primaria y secundaria fue similar, para PSSM (57) y CCSSM (53). Las conceptualizaciones predominantes, encontrada en los estándares PSSM y CCSSM sobre pendiente son: Propiedad Funcional, Constante Lineal y Situación del Mundo Real. CCSSM describe la creación de razonamiento covariacional junto con el razonamiento proporcional en el grado 6, por su parte PSSM se propone construir una base de razonamiento covariacional en los grados 3–5 para comprender las relaciones proporcionales en el grado 6.

Cho, P. y Nagle, C. (2017).	An Analysis of Students' Mistakes on Routine Slope Tasks.	Investigar los errores que presentan los estudiantes universitarios en tareas rutinarias que involucran la pendiente.	Conceptualizaciones de pendiente descritas por Moore–Russo, Connor y Rugg (2011a). Teoría sobre las etapas del razonamiento covariacional propuesta por Carlson et al. (2002).	Identifican 18 errores que cometen los estudiantes en tareas rutinarias sobre la pendiente. Entre ellos destacan los aritméticos y aseveran que son los más generalizados y que fueron trasmitidos a la manipulación algebraica por la mayoría de los estudiantes. Explicitan los elementos procedimentales y conceptuales que pueden vincularse con los errores identificados.
Beyerley, C. y Thompson, P. (2017)	Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change.	Investigar los significados que poseen los profesores de matemáticas de secundaria sobre los conceptos de pendiente, medida y tasa de cambio.	Teoría sobre las etapas del razonamiento covariacional propuesta por Carlson et al. (2002). Teoría de los significados desarrollada por Thompson, P. et al. (2013) y Thompson, P. (2016).	Revela que los significados que poseen los profesores de secundaria sobre la pendiente son limitados y poco productivos. Se presentan evidencias de que los profesores no saben el por qué se usa la división en la fórmula de la pendiente.

Fuente: Elaboración propia

Antes de entrar en lo hallado en la literatura, y puesto que los autores investigados no siempre definen los términos que utilizan o les atribuyen sentidos algo diferentes, conviene que se establezca qué significado se asumen en relación con los términos que se emplea en este apartado. Según esto, usará "concepto" para designar la idea de un objeto matemático y por "conceptualización" la representación mental que un individuo posee de un concepto matemático y que irremediablemente estará ligada o condicionada a su formación y experiencia.

Las teorías de Tall y Vinner (1981) y Vinner (1994) sobre imágenes conceptuales y definición de conceptos distinguen entre cómo se define formalmente un concepto en Matemática y el proceso cognitivo que permite concebir el concepto. Estos autores emplean el término “concepto definición” en el proceso cognitivo (no formal) para referirse a la definición del concepto asumida por el estudiante, por lo que la definición del concepto tiene un carácter personal. El término “concept imagen” se refiere a todas las representaciones mentales, procesos y propiedades que conoce el estudiante asociadas a un determinado concepto. La imagen del concepto se construye a lo largo del tiempo, es producto de las experiencias y evoluciona a medida que el individuo se enfrenta a nuevas situaciones y es capaz de resolverlas.

Debe hacerse notar que ni en los trabajos sobre conceptualizaciones desarrollados por Stump (1999, 2001a) ni en los ampliados y refinados por Moore–Russo et al. (2011a) se define el término conceptualización de manera explícita. Cada una de las conceptualizaciones que los autores refieren se basa en alguna representación particular del concepto de pendiente asociada a un contexto específico y toma en consideración una cualidad esencial del concepto.

Por ejemplo, cuando se conceptualiza la pendiente como la medida de la inclinación de la recta en relación a la parte positiva del eje horizontal se hace referencia a una representación geométrica (contexto) del concepto de pendiente y dicha inclinación se toma como característica esencial del concepto. En ese mismo sentido, Hoffman (2015) asevera que una conceptualización se refiere a una representación específica del concepto (asociada a una característica esencial), mientras que la imagen del concepto es el número total de conceptualizaciones que los profesores han asociado con dicho concepto.

Thompson, (1992, p. 130) considera las concepciones como "una estructura mental más general, que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, y gustos". Remesal, (2006) y Moreano, Amad, Cruz y Cuglievan, (2008) consideran las concepciones como un sistema organizado de creencias que se originan y desarrollan a través de las experiencias e interacciones en las que el individuo participa, repercutiendo en las interacciones subsiguientes con el mundo que le rodea y, según añaden Moreno y Azcárate (2003) en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que realiza. En ese sentido, el término “concepción” proporciona un marco para describir la percepción global y el conocimiento de la evaluación de los docentes.

Para Leong (2014) una concepción es un punto de partida inclusivo que tiene en cuenta las formas de conocer, las creencias de los profesores, actitudes, perspectivas, valores y otras construcciones posibles que ellos estimen útiles para describir sus prácticas en el aula. Mediante las concepciones un individuo entiende, responde e interactúa con un fenómeno y las experimenta dentro de una cultura (Brown, Hui, Yu & Kennedy, 2011). A los efectos del presente trabajo entenderemos las concepciones en el sentido de Leong (2014).

A partir de lo anteriormente expuesto y a modo de conclusión de esta sección podemos establecer que la concepción es un concepto más amplio y general que el de conceptualización, ya que la conceptualización se entiende como una representación específica asociada a una determinada característica esencial de un concepto en un contexto particular; en tanto que la concepción se considera como un conjunto de elementos asociados con la esfera cognitiva–conceptual (significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, etcétera) que favorecen la estructuración del razonamiento y la toma de decisiones.

II.2 Estudios sobre el concepto la pendiente

Dentro de los estudios relacionados con la pendiente, la tesis doctoral de Janvier (1978) puede considerarse como pionera. Aunque está dedicada fundamentalmente al análisis de gráficas de funciones y sus relaciones e interpretaciones, dicha investigación realiza un estudio de algunas dificultades sobre la comprensión del concepto de función, basado en sus gráficas, y pone de manifiesto errores relacionados con el concepto de pendiente. En particular, se explicita el error conocido como pendiente–altura. En el mismo sentido, en la investigación sobre gráficas y sus relaciones de Barr (1980,1981) analiza la comprensión de los estudiantes del concepto de pendiente y describe un estudio para identificar y cuantificar sus dificultades.

McDermott, Rosenquist y van Zee (1983) encuentran la confusión asociada al error conceptual pendiente–altura en las respuestas de los estudiantes universitarios a los que les propusieron tareas en las que había que manejar gráficas de tiempo y velocidad. Estos autores atribuyen el error a múltiples causas con lo que hacen patente la gran complejidad del concepto de pendiente. También Preece (1983) corrobora los hallazgos de Janvier (1978) y McDermott, et a1. (1983) sobre dicho error conceptual, utilizando para su investigación elementos dinámicos. Respecto al trabajo de McDermott, et al. (1983), Clement (1985) identifica como causa del error el uso indebido que los estudiantes hacen de la característica gráfica de la altura en lugar de utilizar la pendiente para representar la velocidad.

A partir de los estudios realizados sobre gráficas y sus interpretaciones, Clement (1985) estructura y propone una clasificación de los errores que cometen los estudiantes en la resolución de problemas relativos a estas tareas. Así mismo, este autor propone algunas explicaciones cognitivas para los errores detectados. Dicho estudio se sustenta en un modelo por competencias asociadas a los conocimientos básicos para elaborar e interpretar gráficas. Este trabajo ratifica los hallazgos de Janvier (1978) pues encuentra en los estudiantes el error pendiente–altura pero, además, evidencia otro error al que denomina pendiente–curvatura. En su clasificación de conceptos erróneos en el estudio de gráficas, Clement (1985) da una gran importancia a los errores conceptuales relacionados con la pendiente y las características incorrectas de una gráfica.

En la tesis doctoral de Zaslavsky (1987), se exponen algunos obstáculos y errores teórico–conceptuales referentes a la pendiente. Por ejemplo, al proponer a los alumnos encontrar una ecuación para la gráfica de una parábola dados tres puntos, algunos estudiantes, equivocadamente, tienen en cuenta sólo dos puntos para buscar la ecuación. Ello permite suponer que está operando una mentalidad o pensamiento lineal, esto es, que se toman dos puntos porque son suficientes para calcular la pendiente de la recta que los contiene. A continuación, ese "valor de pendiente" hallado lo toman como coeficiente principal de la ecuación de la parábola. Esencialmente esta conducta, es una manifestación de la tendencia a la ejecución procedimental y puede estar provocada, por el abuso de tareas que exigen determinar la ecuación de una recta o función lineal conocidos dos puntos.

El elemento fundamental de la investigación realizada por Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) que pretendemos resaltar, es su estudio sobre la naturaleza del aprendizaje en términos de intuiciones y conceptos erróneos y sobre los enfoques plausibles de la enseñanza a través de secuencias, explicaciones y ejemplos (contraejemplos). Como venimos diciendo, las investigaciones realizadas contienen tareas que sacan a la luz dificultades y conceptos erróneos de los estudiantes en relación con el aprendizaje de las gráficas en general o de parte de ellas.

Los autores han agrupado dichas dificultades en tres categorías principales: Confusión de intervalo–punto, Confusión de pendiente–altura e Interpretación icónica. Nótese que la segunda categoría está relacionada con la pendiente y ha sido objeto de estudio en investigaciones precedentes (Janvier, 1978; Bell y Janvier, 1981; Preece, 1983; Clement, 1985; McDermott et al., 1987). Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) sostienen que si los estudiantes consideran la gráfica como fraccionada o en trozos, están poniendo de manifiesto una tendencia general a interpretar las gráficas puntualmente, lo que en definitiva se deriva de la confusión pendiente/altura.

Las repercusiones cognitivas de una escasa comprensión del concepto de pendiente y de la tasa de cambio han despertado también el interés de algunos investigadores motivando varios estudios. Los trabajos de Thompson (1994b), Patrick Thompson y Alba Thompson (1994), señalan las deficiencias detectadas al entrevistar a estudiantes de enseñanza media sobre la comprensión de la tasa constante. Por otra parte, Hauger (1997), utilizando gráficas distancia–tiempo y situaciones tanto de aceleración como de frenado, hace un estudio de casos y encuentra que los estudiantes descubren sus errores y refinan sus conocimientos cuando trabajan con la tasa de cambio.

La investigación desarrollada por Hauger (1997) implica consecuencias para la instrucción pues recomienda a los profesores de cálculo y precálculo que brinden oportunidades a los estudiantes para que usen sus conocimientos y la relación entre pendiente y cambio en intervalos, con lo que favorecerán la comprensión de la tasa de cambio. De manera más general, los profesores deben analizar y sintetizar el conocimiento que los estudiantes utilizan para que determinadas situaciones se doten de sentido y para propiciar que usen sus conocimientos en la construcción de nuevas relaciones y conceptos matemáticos.

Por lo expuesto hasta ahora, se puede asegurar que las investigaciones anteriores a Stump (1999) no trataban específicamente el concepto de pendiente sino que éste subyacía en los estudios sobre funciones, gráficas o tasa de cambio. La investigación de Stump (1999) rompe esa tendencia y examina la forma en que los profesores presentan el concepto de pendiente a sus alumnos, observando que este concepto se definía de diferentes maneras, atendiendo al contexto y a una característica particular del concepto en correspondencia con dicho contexto. En la Tabla 2 figura el conjunto de conceptualizaciones de la pendiente confeccionado por esta autora tras examinar las herramientas utilizadas en un gran número de investigaciones sobre la pendiente.

Las investigaciones que pueden considerarse precedentes al estudio de las conceptualizaciones centradas en la pendiente son las desarrolladas por Barr (1980, 1981) y Azcárate (1992). Barr (1980, 1981) exploró el conocimiento de los estudiantes sobre la pendiente y reportó las dificultades o confusiones encontradas. Azcárate (1992) investigó los esquemas conceptuales y perfiles de estudiantes preuniversitarios sobre la base de Tall y Vinner (1981), definiendo tres perfiles:

- El geométrico,
- El operativo,

- El funcional.

El perfil geométrico se caracteriza por la asociación de la pendiente con el término “inclinación”, con la gráfica de la recta, con el ángulo de inclinación, con la distancia o con un punto del plano cartesiano; el perfil operativo es el relacionado con el algoritmo para calcular la pendiente; y el perfil funcional hace referencia a la correspondencia entre los incrementos de las variables.

Stump (1999) prosigue esta línea pero le da mayor precisión y lo centra en la comprensión matemática de los profesores sobre la pendiente y en el dominio que éstos poseen sobre el contenido de la enseñanza. Al igual que Azcárate (1992), investiga el conocimiento del contenido desde la teoría de las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales de Tall y Vinner (1981), el conocimiento del contenido pedagógico desde la posición de Shulman (1986) y la comprensión desde la perspectiva de las conexiones de McDiarmid, Ball y Anderson, (1989, p. 193) y del conocimiento conceptual y el procedimental de Hiebert y Lefevre, (1986). Identificó siete categorías relativas a las definiciones de pendiente:

- Razón geométrica (G),
- Razón algebraica (A),
- Propiedad física (P),
- Propiedad funcional (F),
- Coeficiente paramétrico (PC),
- Trigonométrica (T),
- Cálculo (C).

En 2001(a), la propia Stump propuso una octava categoría, la denominada, situaciones del mundo real (R). Posteriormente, Moore–Russo et al. (2011a) aún añadió tres conceptualizaciones más (Véase Tabla 2):

- Propiedad determinante (D),

- Constante lineal (L),
- Indicador de comportamiento (B).

Tabla 2. Conceptualizaciones de la Pendiente

Categoría	Pendiente como	Código
Razón geométrica	Rise over run, razón entre los desplazamientos vertical y horizontal en la gráfica de una recta (cuyas representaciones dan pequeños triángulos rectángulos con la recta).	G
Razón Algebraica	Cambio en y entre cambio en x, expresado en la razón algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ó $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.	A
Propiedad física	Propiedad de una recta descrita con expresiones como: grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, etc.	P
Propiedad funcional	Razón de cambio constante entre dos variables o cantidades, bien encontrada en representaciones como tablas, descripciones verbales, etc. (v. gr. cuando x aumenta 2, y aumenta 3); o bien observada en situaciones que implican razones de proporcionalidad constante, donde la razón referida a la unidad es la pendiente.	F
Coeficiente Paramétrico	Coeficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o $y - y_1 = m(x - x_1)$	PC
Trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo que forma una recta con la horizontal (eje x); tangente del ángulo de inclinación.	T

Cálculo	Medida relacionada con la derivada como la tangente a la curva en un punto, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso una no lineal).	C
Situación del mundo real	Situación física (estática): rampas, escaleras, montañas, cimas. Situación funcional (dinámica): relación entre dos variables en otros contextos, v. gr., distancia versus tiempo, velocidad versus tiempo.	R
Propiedad determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares; propiedad con la que una recta puede ser determinada si se conoce un punto de ella.	D
Constante lineal	“Recta” o “plana” que denota ausencia de curvatura y que permanece inalterable cualquiera que sea el desplazamiento que se haga en una determinada dirección de traslación; propiedad única para la “rectitud” de figuras, (lo que hace que una línea sea "recta" o la "rectitud" de una línea); la constante o pendiente se obtiene con cualquier par de puntos de la recta	L
Indicador de comportamiento	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento ($-$), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la existencia de intersección con el eje x.	B

Fuente: Adaptado de “Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards”, de Nagle y Moore–Russo, 2014, Mathematics Educator, 23(2), pp. 40–59.

Stump (2001b) prosigue la investigación sobre comprensión de la pendiente pero ahora como medida y en estudiantes de precálculo. Para ello los estudiantes respondieron a preguntas acerca de situaciones del mundo real, como situaciones físicas que involucraban la pendiente como una medida de inclinación (T) y de situaciones funcionales que involucraban la pendiente como una medida de la razón de cambio (F). Para las situaciones físicas, los estudiantes midieron la inclinación con ángulos en lugar de utilizar las razones. En general, demostraron una mejor comprensión de la pendiente en situaciones funcionales, pero muchos tuvieron problemas para interpretar la pendiente como una medida de la razón de cambio.

Recuperando los estudios sobre profesores pero en un contexto diferente del de USA, Mudaly y Moore–Russo (2011) analizaron el concepto de pendiente de un grupo de 251 profesores de matemáticas de secundaria, sudafricanos, que enseñaban en poblaciones consideradas históricamente desfavorecidas. Sin haberles impartido ninguna instrucción previa, se les aplicó un cuestionario y se obtuvo que algunos de los encuestados tenían una comprensión muy escasa o nula del concepto, mientras que otros evidenciaban un buen entendimiento de la pendiente al ser capaces de conceptualizarla de muchas maneras diferentes. Las conceptualizaciones mayoritariamente evocadas por los profesores fueron coeficiente paramétrico (PC), trigonométrica (T) e indicador de comportamiento (B); contrariamente, la propiedad funcional (F) , la situación del mundo real (R) y la propiedad física (P) fueron evocadas con muy escasa frecuencia.

Nagle, et al. (2014a) estudiaron las conceptualizaciones de pendiente en un curso introductorio de cálculo, esto es, en nivel universitario, examinando tanto a alumnos como a profesores. Encontraron que los estudiantes confían en conceptualizaciones de pendiente basadas en procedimientos, mostrando poca evidencia de razonamiento covariacional. En contraste, los profesores demostraron una comprensión multidimensional de la pendiente como una propiedad funcional, que se aplica a situaciones del mundo real y desempeña un papel integral en el desarrollo de conceptos clave del Cálculo. No resultó frecuente que los profesores utilizaran la determinación creciente / decreciente utilizando la pendiente, al contrario de lo que sucedió en el caso de los alumnos. En estos últimos se identificó la influencia cultural (académica y geográfica) en la conceptualización de pendiente tal y como se había encontrado en investigaciones anteriores, en las que se detectaba la repercusión del plan de estudios de matemáticas de secundaria en la preferencia por el uso de una u otra conceptualización.

Aun volviendo a trabajar con estudiantes y profesores, Nagle, Moore–Russo y Styers (2014a) dan un giro a sus observaciones pues estudian lo que los profesores creen que piensan los alumnos sobre la pendiente una vez que examinan sus declaraciones circunscritas al plan de estudios. Las respuestas de los profesores proporcionaron información sobre su Conocimiento de Contenido y Estudiantes (KCS) y Conocimiento de Contenido y Currículo (KCC). Los resultados sugieren que los profesores valoran la terminología académica relacionada con la pendiente, tienen perspectivas limitadas sobre la pendiente en contextos del mundo real e intentan extender la noción de pendiente al cálculo previo. Los profesores no mostraron seguridad sobre cómo interpretar la conceptualización constante lineal (L) que se refiere a la "rectitud de la recta", particularmente al pasar de relaciones lineales a no lineales y comprender la tasa de cambio variable.

Además, tendían a proporcionar interpretaciones algebraicas de la pendiente (A), incluso cuando las declaraciones estaban abiertas a interpretaciones más trigonométricas (T) o geométricas (G). Este trabajo hace patente la necesidad de que los profesores deben tener un conocimiento suficiente del plan de estudios (KCC) y de las repercusiones del mismo en los estudios posteriores si quieren preparar a sus alumnos para estudios superiores. Ese es el caso del concepto de pendiente que, al resultar fundamental para conceptos más avanzados como la derivada (HCK), debe interpretarse de la forma más amplia posible.

Stanton y Moore–Russo (2012) examinan los currículos de la enseñanza primaria, secundaria y bachillerato de los 50 estados de USA para determinar cómo tratan el concepto de pendiente. Encuentran que la conceptualización más frecuente en estos documentos es la razón geométrica (G) (aparece en 45 estados), seguida muy de cerca por las de indicador de comportamiento (B), propiedad determinante (D), propiedad funcional (F) y la razón algebraica (A) (cada una encontrada en 43 estados). Las conceptualizaciones menos frecuentes fueron la de pendiente como una propiedad física (P) (encontrada en seis estados) y trigonométrica (T) (encontrada en 10 estados). Sin embargo, los currículos de la Escuela Primaria y Secundaria incluyen diferencias que reflejan enfoques alternativos para cubrir las nociones y prerrequisitos claves relacionadas con la pendiente y para extender las ideas de pendiente a funciones no lineales.

Hasta 2013 los estudios de las conceptualizaciones de la pendiente se centran en una descripción aislada entre ellas. Ese año, Nagle y Moore–Russo (2013a) cambian su enfoque y pasan a estudiarlas como una Red de Componentes Conectados, aportando nuevos elementos teóricos. En particular, combinan la investigación sobre la comprensión, procesal versus conceptual, con la investigación sobre las interpretaciones, visuales y analíticas, de la pendiente para así establecer nuevas conexiones entre las conceptualizaciones. La pendiente es un concepto crítico en la educación matemática y sus limitaciones en la comprensión de los estudiantes provienen de la falta de conexiones que hacen entre los diversos componentes y subcomponentes de la pendiente. Esta nueva orientación de la investigación es relevante porque puede ayudar a estudiantes y profesores a desarrollar una mejor compresión del concepto en cuestión.

Nagle, Casey y Moore–Russo (2017), aplicando la teoría de la transferencia del conocimiento de Royer, Mestre, y Dufresne (2005), dirigen su atención a investigar si los alumnos utilizan sus conceptualizaciones de la pendiente cuando, en estadística, partiendo de una recta imprecisa deben encontrar la recta de mejor ajuste. Tanto el contexto situacional de las tareas planteadas (el precio del boleto versus la asistencia al teatro) como el matemático (los puntos alternos dados como datos) influyeron en el conocimiento previo que los estudiantes transfirieron a la nueva tarea.

Cabe deducir por ello que la comprensión conceptual de la pendiente no garantiza necesariamente la transferencia a un nuevo contexto problemático y que no resulta superflua la contextualización al mundo real. Afirman que los estudiantes transfirieron las conceptualizaciones de la propiedad funcional (F) y del mundo real (R) de la pendiente mientras empleaban el razonamiento covariacional. En la búsqueda de la línea de mejor ajuste tampoco bastó la conceptualización indicador de comportamiento (B) sino que hubo de concurrir al razonamiento covariacional y la acción mental 2 que, según Carlson et al., 2002, tiene en cuenta el sentido del cambio; ello avala la conjetura de que estas nociones están estructuralmente relacionadas.

Deniz y Kabael (2017) retoman las conceptualizaciones como objetos de estudio pero desde el punto de vista de la teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) propuesta por Dubinsky (1991). Investigaron los procesos de construcción y matematización de la pendiente en estudiantes que cursaban 8º grado, centrándose en las conceptualizaciones razón geométrica (G) y razón algebraica (A). Observaron que los estudiantes que podían construir el concepto de pendiente a nivel de acción, no podían construirlo como una razón. Podían calcular la pendiente con el “rise over run” o con la fórmula, sin embargo no podían conceptualizar la invariabilidad de la pendiente en todos los tramos de la recta (L), ni interrelacionar esta interpretación con la razón algebraica (A) y la interpretación de la razón geométrica (G). Notaron tendencia hacia la interiorización (etapa de proceso) cuando la invariancia de la pendiente entre dos puntos cualesquiera de la recta quedaba justificada por la relación algebraica. Otro indicador que demuestra la construcción de la pendiente en la etapa del proceso es el uso de la relación algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ asociada a la interpretación geométrica de la pendiente. Afirma que la etapa de objeto ocurrirá durante el aprendizaje de conceptos como la derivada donde el concepto de pendiente es un requisito previo y que en 8º grado los indicadores de la etapa de objeto no se pueden observar explícitamente.

Siguiendo la misma línea, en un estudio más reciente Nagle et al. (2019) extienden la investigación sobre la pendiente conectando las 11 conceptualizaciones de la pendiente con la Teoría APOS. En esencia plantean que el concepto de pendiente puede construirse interrelacionando las "formas de pensar la pendiente" y los "usos de la pendiente". Son formas de pensar la pendiente como acción, proceso u objeto, las conceptualizaciones: razón algebraica (A), razón geométrica (G) y propiedad funcional (F); la fusión de estas da origen a la conceptualización constante lineal (L), que representaría el objeto pendiente. Los usos de la pendiente estarían en las otras siete conceptualizaciones: coeficiente paramétrico (PC), indicador de comportamiento (B), propiedad física (P), propiedad determinante (D), situación del mundo real (R) y, cuando sea apropiado, trigonométrica (T) y cálculo (C). Esta propuesta puede ayudar a los profesores a elaborar actividades matemáticas para desvelar las etapas de comprensión del concepto de pendiente en los estudiantes, o podría usarse en el diseño de materiales para la enseñanza que tengan en cuenta las formas de facilitar la reformulación de las ideas de los estudiantes sobre la pendiente para transitar hacia etapas más avanzadas.

II.3 Conclusiones del capítulo

Los estudios primarios de la pendiente tienen como objetivo explorar el conocimiento de los estudiantes (Barr, 1980, 1981) y de sus esquemas conceptuales (Azcárate, 1992). La teoría de Tall y Vinner (1981) sobre concepto imagen y concepto definición, constituyó una base importante para conocer la estructura cognitiva de los individuos acerca del concepto de pendiente. Sobre esta base y la de la Teoría sobre el Conocimiento Pedagógico del Contenido introducida por Shulman (1981) Stump identificó lo que a la postre los investigadores denominaron como conceptualizaciones de la pendiente.

Utilizando las conceptualizaciones de pendiente, se han realizado múltiples estudios que consideran la pendiente en secundaria, bachillerato y universidad, en profesores, en estudiantes y en documentos curriculares. Nagle y Moore–Russo (2013a) dan un viraje proponiendo la Red de Componentes Conectados combinada con las comprensiones, procesal y conceptual, y las interpretaciones, visuales y analíticas, sugerida por Stump (2001a). Carpenter, 1986; Hiebert y Carpenter, 1992; Hiebert y

Lefevre, 1986, consideran la comprensión matemática como derivada del establecimiento de amplias redes de conexión entre conceptos y procedimientos. De aquí devienen lo que se denomina como conocimiento procedimental y el conocimiento conceptual que juegan un papel importante en las conexiones matemáticas, ya que ambos están correlacionados positivamente como lo señalan Rittle–Johnson y Koedinger, (2009); Rittle–Johnson y Schneider (2015); Rittle–Johnson, Siegler y Alibali, (2001).

En los dos últimos años, la teoría APOS, surgida en la década de los 90, ha cobrado nuevo impulso al utilizarse como base teórica para sustentar las conceptualizaciones de la pendiente. APOS es un marco teórico que permite estudiar tanto el desarrollo de estructuras cognitivas o etapas de comprensión, como el proceso mismo de aprendizaje de un concepto. APOS se basa en la teoría piagetiana de la abstracción reflexiva, que describe las ocurrencias cognitivas en la mente en el proceso de aprendizaje de un concepto (Dubinsky, 1991), y, por tanto, sirve para mostrar cómo se aprenden los conceptos matemáticos (Oktaç y Çetin, 2016, p. 164).

Según APOS, la construcción del concepto comienza con acciones, progresa luego a procesos dinámicos mediante la interiorización de las acciones y, finalmente, evoluciona de procesos dinámicos a objetos encapsulados (Tall, 1999). Deniz y Kabael (2017) refieren que los estudiantes de 8º dan muestras de construir el concepto de pendiente como una fórmula o una serie de operaciones sin darle sentido en la etapa de acción. En la etapa de proceso encuentran ciertas dificultades en la interiorización de la pendiente como razón constante en todos los tramos de la recta y afirman que la etapa de objeto ocurrirá hasta el aprendizaje de la derivada. Nagle et al. (2019), sobre la base de misma teoría, plantean una sistematización de las conceptualizaciones más integradora, que consideramos tiene potencialidades para seguirse desarrollando tanto en la investigación como en la docencia. Las formas de pensar versus los usos de la pendiente que incluyen todas las conceptualizaciones marca una dirección específica en la investigación que puede ser desarrollada en un futuro.

Capítulo III. Estudio epistemológico del concepto de pendiente

El presente capítulo se ocupa de un estudio epistemológico de la noción de pendiente, su relación con la recta tangente a una curva y en general con la línea tangente en un punto de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Comenzamos con un breve estudio de algunos hechos básicos de la pendiente para luego ver su evolución en relación con el concepto de tangente a curvas diferenciables clásicas, como punto de partida hasta desarrollos matemáticos más profundos que implican elementos de la Teoría de la Medida Geométrica.

La pendiente es un concepto matemático, de naturaleza geométrica, ya en la antigüedad el hombre recurría, de alguna manera, a la noción de pendiente para resolver problemas prácticos. Muchos de estos problemas estaban relacionados con la elevación de las montañas, la construcción de edificaciones, rampas y caminos. Un problema concreto que enfrentaron los antiguos fue la construcción de pirámides, cuya dificultad consistía en mantener una inclinación uniforme en cada cara y a su vez la misma en todas sus caras. Según (Boyer, 1989) esta necesidad es lo que llevó a los egipcios a utilizar lo que denominaron "seqt (relación avance versus subida)", equivalente a lo que hoy conocemos como pendiente de una superficie plana. Desde el punto de vista teórico, matemáticos griegos como: Euclides (325 a. C., 265 a. C.) y Apolonio (262 a. C., 190 a. C.); utilizaron diferentes técnicas y métodos para obtener la tangente a una curva; el concepto de tangente que poseían los griegos era estático; consideraban a la tangente como la recta que toca a la curva sin cortarla.

El primero estudió el comportamiento de una recta trazada a una circunferencia y el segundo elaboró técnicas puramente geométricas para la construir rectas tangentes a las cónicas. Las técnicas encontradas solo eran aplicables a curvas particulares, por lo cual se hizo necesario buscar nuevos métodos para encontrar la recta tangente a una curva. Con la introducción de la Geometría de Descartes en 1637, se desarrollaron métodos algebraicos para el trazado de tangentes a cónicas y a otras curvas. Con el Método de las Fluxiones de Newton (1665–1666) y el de las diferenciales de Leibniz (1646–1716) encuentran métodos generales para el trazado de tangentes. Los matemáticos del siglo XVII intuitivamente asumían la idea de la recta tangente a una curva como la posición límite de una secante. En 1823, Cauchy (1789– 1857) resolvió el problema, dando una definición precisa de la derivada en términos del concepto de límite.

Nótese que en toda la geometría griega se tenía una concepción estática y global de la tangente a una curva. Tanto la curva como la tangente, señala Cantoral (1988), son dadas desde sus inicios como lugares geométricos. En su definición se pedía que la recta solo toque en un punto a la curva y que no la vuelva a tocar en otro, esto era explicable porque en efecto en las curvas cónicas tal situación ocurre; con estas ideas sobre las tangentes se siguió trabajando durante siglos.

La pendiente es analizada, esencialmente, como la tangente del ángulo inclinación, formado por la recta orientada hacia arriba con la dirección positiva del eje horizontal. Un estudio más profundo sobre el concepto no puede estar desligado de su relación y evolución de los conceptos básicos de medida y tangente a conjunto de puntos en un determinado contexto matemático (ver Figura 1).

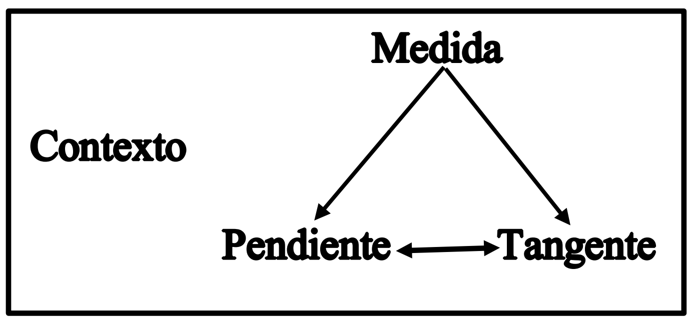


Figura 1: Relación conceptual

El primer gran progreso para unificar la teoría sobre la pendiente a partir del análisis de la tangente ocurrió a principios del siglo XVII con la invención de la Geometría Analítica por R. Descartes (1596–1650). La idea de Descartes era manipular algebraicamente la geometría, representando conceptos geométricos en términos de números y ecuaciones. De este modo los problemas de la geometría se pudieron traducir a problemas del álgebra ordinaria. La idea de Descartes, señala Edwards (1979), consiste en considerar una curva y un círculo con la propiedad de que se cortasen en dos puntos, uno de ellos es donde se desea trazar la tangente. Posteriormente se supone que los dos puntos de intersección son realmente uno solo y, por tanto, la curva y el círculo tienen un punto doble de contacto (de ahí que suele llamarse método de las raíces iguales). Las ecuaciones que de ahí se obtienen permiten encontrar la pendiente de la tangente si la curva tiene por ecuación un polinomio.

Uno de los contemporáneos de Descartes, P. Fermat (1601–1665), con una mirada diferente propone una nueva idea sobre la tangente, considera que la secante aproxima “tan bien” a la tangente en las proximidades del punto de tangencia. Idea que los libros de cálculo actuales utilizan a menudo para explicar que la tangente es la posición límite de una sucesión de secantes. Acá se trasciende la concepción global de tangente a una concepción local. Es decir, para ser tangente no se requiere que la recta cruce una y sólo una vez a la curva en toda su extensión, sino que ello ocurra en las proximidades infinitesimales del punto de tangencia.

Un elemento que resultó ser un obstáculo para la resolución del problema de encontrar la tangente a una curva en un punto dado, lo constituyó la forma de pensar sobre el infinito que poseían los matemáticos de la antigüedad. Particularmente, en la matemática griega prevalecía una concepción pitagórica sobre las magnitudes como el espacio, el tiempo y en general las magnitudes que eran concebidas como continuas. Esta concepción teórica adolecía de inconsistencias lógicas que quedarían reveladas con las paradoja propuesta por Zenón de Elea, s. V a. C, acerca del infinito y lo infinitesimal (Kleiner, 2001). Resultando como el epicentro de esta problemática la aparición de procesos infinitos (infinito potencial), Zenón argumentaba que Aquiles no podría alcanzar la tortuga dado la imposibilidad de realizar una infinidad de actos (infinito actual). Es decir, la suma de un número infinito de intervalos de tiempo positivos no puede ser finita (López, 2014).

Dichos matemáticos trataban, con cierto recelo, los problemas donde aparecián procesos infinitos en su resolución y en su lugar utilizaban técnicas, ingeniosas, que les permitía encontrar solución al problema que abordaban con una exactitud que satisfacía los requerimientos prácticos de dicho problema (el cálculo del área, volúmenes etc., Valdivé, 2008). Cabe destacar que el estado antes señalado con respecto al problema de encontrar la tangente a una curva cualquiera en un punto, se mantiene prácticamente inmutable hasta el siglo XVII, cuando los métodos de las fluxiones de Newton (1643–1727) y de los diferenciales de Leibniz (1646–1716) permitieron la elaboración de procedimientos generales para el trazado de tangentes. Los matemáticos del siglo XVII intuitivamente asumían la idea de la recta tangente a una curva como la posición límite de las secantes.

A pesar de que las contribuciones de Newton y Leibniz fueron atacadas por el uso dudoso de los infinitesimales, se admitía el hecho de que sus descubrimientos y procedimientos conducían a resultados correctos. En 1823, Cauchy (1789–1857) resolvió esta situación, dando una definición precisa de la derivada en términos del concepto de límite. La comprensión rigurosa que Weierstrass (1815–1897) dio al concepto de la derivada se pone de manifiesto al publicar en 1872 un ejemplo de una curva continua en todo punto y no derivable (sin tangente) en ninguno. Este mítico ejemplo de Weirstrass entra dentro de la categoría de los denominados por un tiempo monstruos geométricos, siendo en la terminología actual solo un clásico ejemplo de conjunto fractal.

La intención de llevar esta evolución hasta un contexto algo más abstracto, no puede dejar fuera la noción de medida y tal situación se enmarca dentro de la Teoría Geométrica de la Medida. Es por ello que para mayor profundidad en los orígenes históricos, aunque comentados más arriba, se remite al lector a Martínez de la Rosa, 2009. Nuestro punto de partida será el concepto de tangente en un punto a curvas diferenciables.

La naturaleza de los conjuntos en el plano suele ser mucho más complicada que la que supone las cónicas o las curvas diferenciables en general. Surge entonces de manera natural la pregunta de ¿cómo encontrar la recta tangente en un punto dado $\boldsymbol{p}$ respecto a un conjunto plano arbitrario $\boldsymbol{E}$? Este es un problema nada trivial. Ante todo se necesita de una noción de tangencia más amplia que juegue el correspondiente papel en este contexto generalizado y que a su vez conserve su esencia primaria en los casos particulares de conjuntos bien comportados. En este sentido acude a nuestra ayuda una teoría matemática que nace en la segunda mitad del siglo pasado y que puede ser descrita como una geometría diferencial, generalizada a través de la teoría de la medida, para el tratamiento de transformaciones, curvas y superficies que no son necesariamente suaves: la Teoría Geométrica de la Medida.

Los orígenes de esta disciplina se remontan al año 1960, en que se publica el trabajo fundacional de Herbert Federer y Wendell Fleming sobre los flujos normales e integrales Federer, Fleming (1960). Sin embargo, son varios los nombres de notables matemáticos que están ligados a la fundación de esta teoría, entre los que destacan Young (1955), De Giorgi (1961), Almgren (1966), entre otros. Trabajos pioneros y ya vinculados actualmente a la Teoría Geométrica de la Medida son debidos a Besitcovitch (1946).

Comencemos entonces con lo más "simple": las curvas diferenciables o suaves.

III.1 Tangente a una curva suave

Una curva en el plano es la imagen por una función continua

$$\phi(t) := \left(x(t), y(t)\right)$$

de un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, siendo este último el intervalo que recorre el denominado parámetro t.

Es bien conocido que el conjunto de puntos

$$\{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$$

puede ser generado por distintas parametrizaciones, pero estos detalles no serán de importancia en este trabajo y pueden ser revisados en muchos materiales dedicados al Análisis Matemático y a la Geometría Diferencial. Para nuestros propósitos y sin perder generalidad, consideraremos a las curvas del plano como los puntos de la gráfica de una función continua en un intervalo de $\mathbb{R}$.

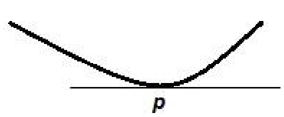
Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y consideremos la curva

$$\gamma := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}.$$

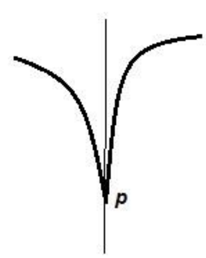
Si la derivada de la función f existe en el punto $x_0 \in (a, b)$, entonces la recta tangente a γ en el punto $\boldsymbol{p}_0 := (x_0, f(x_0))$ es única y su pendiente coincide con $f'(x_0)$. En términos vectoriales se puede decir que la recta tangente a γ en el punto $\boldsymbol{p}_0$ es la recta que pasa por este punto y posee vector director unitario

$$\frac{(1, f'(x_0))}{\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}}. \tag{1}$$

En la Figura 2 (a) se muestra el ejemplo más representativo de tangencia a una curva suave. El punto $\boldsymbol{p}$ en (b) es un poco más polémico y aunque la recta que se muestra es la tangente más natural, lo cierto es que en el punto $\boldsymbol{p}$ existen infinitas rectas tangentes a la curva dada.



(a) p un punto de suavidad



(b) p un punto de "retroceso"

Figura 2: Rectas tangentes

De igual forma, en la Figura 3 (a) ninguna recta parece ser la indicada para ser llamada recta tangente a la curva en el punto $\boldsymbol{p}$. Estos ejemplos sugieren que la tangencia a una curva en un punto queda mejor expresada si se tiene en cuenta un cono de tangencia y no una recta, como se muestra en el inciso (b) de la Figura 3.

(a) Muchas rectas (b) Cono único de tangencia

Figura 3: ¿Recta o cono de tangencia?

Esta idea de cono de tangencia resulta muy interesante. En la siguiente sección se tratará con el rigor necesario. Por otro lado ¿acaso una recta no es un cono cuyo ángulo es 180 grados?

Sea $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2\ y\ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. Denotemos por $Tan(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ al denominado “cono de tangencia” de $\boldsymbol{E}$ en el punto $\boldsymbol{p}$, definido como el conjunto formado por los vectores tangentes a $\boldsymbol{E}\ en\ \boldsymbol{p}$:

$$Tan(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}) \coloneqq \{r \in \mathbb{R} : r > 0\} \left[\bigcap_{\epsilon > 0} Clos \left\{ \frac{x - \boldsymbol{p}}{|x - \boldsymbol{p}|} : x \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}| < \epsilon \right\} \right].$$

Para mayor claridad en la exposición, ofrecemos a continuación una explicación más bien intuitiva de cómo construir el cono de tangencia $Tan(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$. Comenzamos por interceptar el conjunto $\boldsymbol{E}$ con el círculo $B(\boldsymbol{p}, \epsilon)$ de radio ϵ centrado en $\boldsymbol{p}$ y denotamos por $Tan_{\epsilon}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ a la clausura topológica del conjunto de todas las semirrectas que parten de $\boldsymbol{p}$ y pasan por al menos un punto $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \cap B(\boldsymbol{p}, \epsilon)$ distinto de $\boldsymbol{p}$. Es fácil ver que $Tan_{\epsilon 1}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}) \subset T_{\epsilon 2}\,(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ para $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Finalmente, el cono de tangencia $Tan(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ no es más que la intersección $\bigcap_{\epsilon > 0} Tan(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$, que alternativamente pudiera entenderse como el conjunto límite de $Tan_{\epsilon}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ cuando $\epsilon \to 0$.

Antes de pasar a ver algunos ejemplos, sería conveniente hacer notar que en el caso de ser $\boldsymbol{E} = \gamma$ una curva con las características de diferenciabilidad mencionadas más arriba, el cono te tangencia en un punto $\boldsymbol{p}_0 \coloneqq (x_0, f\,(x_0)) \in \gamma$ no es más que la recta tangente a dicha curva en $\boldsymbol{p}_0$.

En efecto, se tiene

$$\frac{\left(x,f(x)\right)-\left(x_0-f(x_0)\right)}{\left|\left(x,f(x)\right)-\left(x_0-f(x_0)\right)\right|}=\frac{\left(x-x_0,f(x)-f(x_0)\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2+\left(f(x)-f(x_0)\right)^2}}$$

$$=\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\frac{\left(1,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}{\sqrt{1+\frac{\left(f(x)-f(x_0)\right)^2}{(x-x_0)^2}}}$$

$$=\pm\frac{\left(1,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}{\sqrt{1+\frac{(f(x)-f(x_0))^2}{(x-x_0)^2}}}$$

de donde se deduce directamente que

$$Tan(\gamma,\,\boldsymbol{p_0})=\pm r\frac{\left(1,f^{'}(x_0)\right)}{\sqrt{1+\left[f^{'}(x_0)\right]^2}},r\in\mathbb{R},r>0.$$

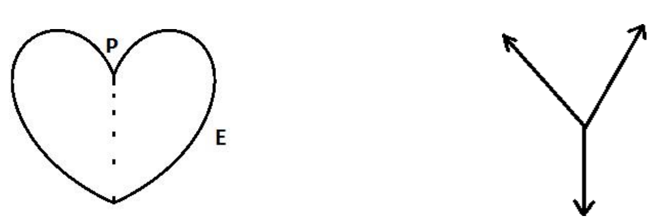
Es decir, $Tan(\gamma,\,\boldsymbol{p_0})$ es la recta que pasa por $\boldsymbol{p_0}$ con vector director unitario (1).

Los ejemplos que a continuación se presentan muestran gráficamente que (como era de esperar) para conjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, el cono de tangenciano es en general una recta. Comenzamos por el conjunto representado por un corazón partido a la mitad (Figura 4). Si seguimos el procedimiento descrito en la construcción del cono de tangencia, podemos notar que en este caso particular los conjuntos $Tan_{\epsilon}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ se aproximan, en la medida que ϵ tiendea cero, a un cono de tangencia formado

(a) $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{E}$ (b) Cono tangente a $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{p}$

Figura 4: Cono tangente del corazón partido por tres semirrectas orientadas que parten del punto $\boldsymbol{p}$. Una de ellas vertical y las otras dos constituyen tangenteslaterales (a la izquierda y a la derecha) al conjunto $\boldsymbol{E}$ en el punto $\boldsymbol{p}$

Si tomamos un corazón "quebrado", como se muestra en la siguiente Figura 4, el cono de tangencia a $\boldsymbol{E}$ en el punto $\boldsymbol{p}$ sigue siendo el mismo. Esto se debe a que la sucesión vertical de puntos converge al punto $\boldsymbol{p}$, por lo tanto siempre existirán vectores sobre esta línea vertical, independientemente de que el número $\epsilon > 0$ sea arbitrariamente pequeño. Es decir, esta semirrecta vertical está contenida en $Tan_{\epsilon}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ para todo $\epsilon > 0$ y por tanto en el cono de tangencia $Tan(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$.



(a) $\boldsymbol{E}\ y\ \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{E}$ (b) Cono tangente a $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{p}$

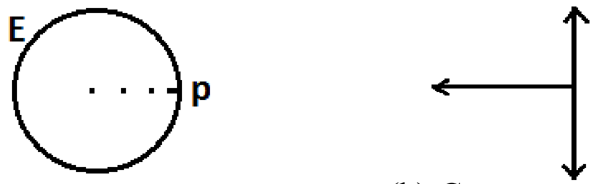
Figura 5: Cono tangente del corazón "quebrado"

Igualmente, la circunferencia con un radio trazado (Figura 6) y la circunferencia con puntos convergentes sobre el radio (Figura 7) poseen el mismo cono tangente en el punto de tangencia.

(a) $\boldsymbol{E}\ y\ \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{E}$ (b) Cono tangente a $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{p}$

Figura 6: Circunferencia con radio

Los ejemplos anteriores pone de manifiesto cómo una sucesión de puntos puede contribuir significativamente al cono tangente, aún cuando esencialmente lo hace muy poco al conjunto, o al menos su contribución es desechable desde el punto de vista de la Teoría de la Medida: una sucesión de puntos tiene medida (unidimensional) cero.



(a) $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{E}$ (b) Cono tangente a $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{p}$

Figura 7: Circunferencia con puntos convergentes sobre el radio

Este hecho es un indicio de que no sería descabellado desechar la presencia de tales conjuntos "pequeños", considerando la definición de un cono tangente que no los tenga en cuenta. Para esto se hace necesario adentrarnos, aunque sea brevemente, en la Teoría Geométrica de la Medida, cuyos elementos básicos se presentan en la próxima sección. Antes de pasar a esta, y a modo de motivación, remarcamos que si no tenemos en cuenta estos conjuntos "pequeños", el cono tangente del ejemplo de la Figura 6 se convierte en una recta. Es decir ¡renace la recta tangente en un punto a un conjunto que en ninguna vecindad de dicho punto es una curva diferenciable!

III. 2 Geometría de la medida

Nuestro universo es el plano $\mathbb{R}^2$ y la medida usada será aquella que extiende de modo natural el concepto de longitud de una curva rectificable: la medida de Hausdorff unidimensional. Es conocido que la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ es la única medida invariante por traslaciones que asigna un valor en el intervalo $[0,\infty]$ a todo conjunto de Borel en el plano y tal que específicamente se cumple que la medida del cuadrado unitario es igual a 1, es decir $\mathcal{L}^2[0,1]^2 = 1$. Sin embargo,si la intención es medir conjuntos unidimensionales en el plano (por ejemplo una curva cerrada o abierta), la medida de Lebesgue nos dice muy poco, de hecho asigna el valor 0 a todos estos conjuntos.

Es por ello que aparece la necesidad de considerar una medida que asigne valores no nulos a conjuntos unidimensionales en $\mathbb{R}^2$. Clásicamente, si se está en presencia de una curva rectificable γ (parametrizable por una función de variación acotada) entonces se le puede asignar la medida que corresponde a la variación total de dicha función. Esto es equivalente a aproximar la curva por poligonales de lados cada vez más pequeños de longitud δ, así la variación total coincide con el límite cuando $\delta \to 0$ y este límite no es más que la medida (o la longitud) de la curva γ. Pero ¿cómo desarrollar un procedimiento análogo en conjuntos en $\mathbb{R}^2$ de naturaleza ajena al concepto de curva?

En 1918 el matemático alemán Félix Hausdorff introdujo una medida 1–dimensional en $\mathbb{R}^2$ (realmente su aporte fue en espacios de cualquier dimensión), que mide cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y que en particular, en el caso de curvas rectificables, coincide con la longitud anteriormente mencionada. La idea de Hausdorff consiste en cubrir el conjunto dado $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ por una cantidad infinita de conjuntos de diámetros que no exceden cierto número positivo δ, tomar el menor valor de las sumas de estos diámetros dentro de todos los cubrimientos posibles (comúnmente llamados δ–cubrimientos) y luego hacer tender $\delta \to 0$. Más formalmente, sea $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2, \delta > 0$. Diremos que $\{S_j\}$ es un δ–cubrimiento de $\boldsymbol{E}$ si se cumple

$$\boldsymbol{E} \subset \bigcup_j S_j, \;\; diam[S_j] = \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|, \;\; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in S_j\} \leq \delta.$$

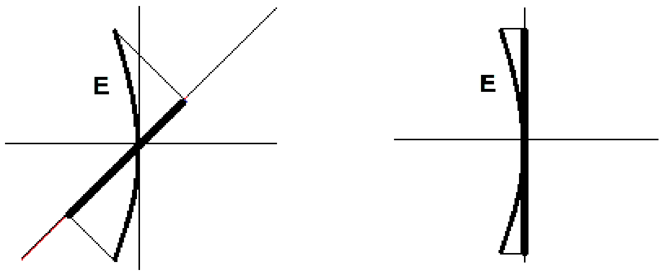
De esta forma, la medida de Hausdorff unidimensional de $\boldsymbol{E}$ se define como

$$\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E}) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_j diam[S_j] : \{S_j\} es\ un\ \delta\text{–}\ cubrimiento\ de\ \boldsymbol{E} \right\} \quad (2)$$

Debe mencionarse que esta definición se generaliza fácilmente para cualquier número $s > 0$, dando origen a la medida s–dimensional de Hausdorff $\mathcal{H}^s$. Con este fin basta substituir en (2) la sumatoria $\sum_j diam[S_j]$ por $\sum_j (diam[S_j])^s$. Dado un conjunto $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$, el número menor s, tal que $\mathcal{H}^s(\boldsymbol{E}) < \infty$ se denomina dimensión de Hausdorff de $\boldsymbol{E}$. Puede probarse que la dimensión de Hausdorff es siempre mayor o igual que la dimensión topológica de un conjunto $\boldsymbol{E}$ (ver Falconer, 1986). En el sentido de Mandelbrot (1982), un conjunto se dice fractal cuando esta desigualdad es estricta.

En 1932 J. Favard define otra medida que coincide con la medida de Hausdorff en el caso de conjuntos suficientemente buenos como las curvas diferenciables. La idea subyacente en la noción propuesta por Favard parte de considerar todas las proyecciones del conjunto $\boldsymbol{E}$ en las rectas que pasan por el origen $(0, 0)$, calcular la medida de Lebesgue unidimensional de estas proyecciones y luego promediar estos datos. La medida resultante es lo que ahora se conoce como medida integro–geométrica $I(\boldsymbol{E})$.

En la Figura 8 que sigue se muestran las proyecciones de un conjunto $\boldsymbol{E}$ respecto a dos rectas distintas que pasan por el origen, apreciando la diferencia entre las medidas unidimensionales de las proyecciones obtenidas.



(a) Proyección de medida menor (b) Proyección de medida mayor

Figura 8: Proyecciones de $\boldsymbol{E}$ en dos rectas

Otro hecho a remarcar es el siguiente: un conjunto puede ser masivo respectoa una recta (proyección con medida positiva) y ser *invisible* respecto a otra, es decir su proyección en dicha recta puede reducirse a un conjunto de medida de Lebesgue cero (ver Figura 9).

(a) Masivo respecto al eje (b) Masivo respecto al eje

Figura 9: Proyecciones en los ejes x e y

De hecho existen conjuntos que son invisibles respecto a casi todas las rectas que pasan por el origen. En esta clase de conjuntos se incluyen de manera especial los conjuntos de tipo Cantor. En la última sección retomaremos estos conjuntos casi invisibles $\boldsymbol{E}$ para los cuales obviamente se tiene la igualdad $I(\boldsymbol{E}) = 0$. Pero ya es hora de retomar el hilo central de este trabajo: las rectas tangentes.

Un concepto que nos ayudará a medir cuan poco o mucho un determinado subconjunto contribuye a un conjunto es la noción de densidad. Sea $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{p}$ un punto de $\mathbb{R}^2$. La densidad (1–dimensional) del conjunto $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{p}$ se define como

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p}) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E} \cap B(\boldsymbol{p},r))}{2r}, \tag{3}$$

si existe el límite, donde $B(\boldsymbol{p},r)$ es el círculo con centro en $\boldsymbol{p}$ y radio r.

Debe mencionarse que el límite en (3) no existe en general. Es por ello que enfoques más generales emplean límite superior o límite inferior en lugar del límite. Esta generalización conduce a los conceptos de densidad superior y densidad inferior. No obstante, para el alcance y objetivo del presente trabajo la noción dada de densidad será suficiente.

Por ejemplo, el conjunto de la Figura 6 (a) tienen densidad 1 en todo punto, salvo en el centro que tiene densidad $\frac{1}{2}$ y en el punto $\boldsymbol{p}$ cuya densidades $\frac{3}{2}$. Por su parte, y he aquí una diferencia significativa, el conjunto de la Figura 7 (a) tiene densidad igual a 1 en todos los puntos de la circunferencia (incluyendo a $\boldsymbol{p}$) y densidad cero en los puntos restantes.

En los ejemplos más arriba descritos es evidente que la densidad de un punto que no pertenezca al conjunto será igual a 0, pero esto no es la generalidad. En el ejemplo que se muestra en la Figura 10, el punto $\boldsymbol{p}$ no pertenece a $\boldsymbol{E}$ y sin embargo tiene densidad 1 respecto de $\boldsymbol{E}$.

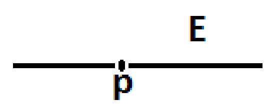


Figura 10: $\boldsymbol{p} \notin \boldsymbol{E}$

Ya estamos en condiciones de definir nuestro cono de tangencia que ignora los conjuntos no significativos desde el punto de vista de la medida de Hausdorff. Sea $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. Diremos que el conjunto $\boldsymbol{F}$ aproxima a $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{p}$ si

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{E} \setminus \boldsymbol{F}, \boldsymbol{p}) = 0.$$

Esta denominación inspira la definición de cono tangente aproximado $\Theta_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ de $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{p}$ como el menor de los conos de tangencia de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{p}$, donde $\boldsymbol{F}$ aproxima a

$$\Theta_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}) = \cap_{\boldsymbol{F}}\{\Theta(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{p}): \mathcal{D}(\boldsymbol{E} \setminus \boldsymbol{F}, \boldsymbol{p}) = 0\}.$$

Volviendo a los ejemplos anteriores, no es difícil comprobar que el cono de tangencia aproximado del ejemplo de la Figura 6 no es más que la recta tangente a la circunferencia en el punto $\boldsymbol{p}$. En efecto, se puede tomar a títulode conjunto $\boldsymbol{F}$, aproximado de $\boldsymbol{E}$, a la circunferencia cuyo cono tangente en $\boldsymbol{p}$ es la recta tangente en el sentido usual.

Los ejemplos que se presentan tienen como finalidad darle un carácter instructivo y motivador a este trabajo. No obstante, este enfoque de tangencia aproximada significa una extensión profunda del concepto de recta tangente, ya no solo a los clásicos conjuntos bien comportados sino también a conjuntos planos muy complicados geométricamente. A continuación introducimos una clase de conjuntos muy general donde las rectas tangentes existen, al menos en casi todos los puntos.

Se dice que $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ es rectificable si $\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E}) < \infty$ y existe una conjunto numerable de curvas diferenciables γ_j tales que

$$\mathcal{H}^1\left(\boldsymbol{E} \setminus \cup_j \gamma_j\right) = 0. \tag{4}$$

El concepto de rectificabilidad es estable, en el sentido de que en lugar de curvas diferenciables pueden tomarse las imágenes de funciones de Lipschitz, siendo esta última la forma clásica en que el concepto aparece comúnmente en la literatura. Las funciones de Lipschitz en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ son aquellasque satisfacen una condición de continuidad uniforme caracterizada por la condición:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \text{ para todo } x, y \in [a, b], \tag{5}$$

donde K es un número positivo conocido como constante de Lipschitz.

Estas funciones en Teoría Geométrica de la Medida ocupan el lugar de las funciones diferenciables del Análisis Real y de la Geometría Diferencial. Un celebrado teorema, debido inicialmente a Rademacher, asegura que toda función de Lipschitz tiene derivada en casi todos sus puntos de definición. No obstante, no debemos dejarnos confundir por esta aparente bondad, losgráficos de funciones de Lipschitz pueden llegar a ser intratables cuando de dibujar se trata. Ellos pueden tener una cantidad infinita numerable de puntos angulares al estilo de la Figura 3, aunque no admiten puntos de retroceso del tipo ilustrado en la Figura 2 (b). Los puntos de retroceso(*cusps* en lengua inglesa) impiden la existencia de la constante positiva K en la condición de Lipschitz.

En general, los conjuntos rectificables pueden ser bien complicados, en la Figura 11 se muestran un par de ellos.

(a) Hombre con numerables pecas (b) Taza humeante

Figura 11: Conjuntos rectificables en $\mathbb{R}^2$

Para el lector con mayor curiosidad, lo remitimos al ejemplo elaborado en Morgan (2016, p. 29), donde se hace uso de los conjuntos de tipo Cantor. El ejemplo construido en esta obra es un ejemplo mucho más revelador de lo complicado y mal comportados que pueden llegar a ser los conjuntos rectificables.

En contraste con este mal comportamiento, a continuación exponemos un resultado sorprendente: los conjuntos rectificables unidimensionales se comportan (desde el punto de vista de la Teoría Geométrica de la Medida) como las curvas diferenciables en el plano. Basta para ello considerar en lugar de la tangente tradicional, el cono tangente aproximado.Más precisamente, se tiene:

Teorema 1. *Si* $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ *es rectificable, entonces en casi todos sus puntos* $\boldsymbol{p}$ *se cumple que* $\mathcal{D}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}) = 1$ *y además el cono tangente aproximado* $\Theta_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ *es una recta (¡la recta tangente!).* (ver Simon, 1983; Hardt y Simon, 1986; Federer, 1966; Morgan, 2016)

El alcance de este resultado queda aún más evidenciado si se tiene en cuenta la ya mencionada generalidad de los conjuntos rectificables. Aunque desde el punto de vista de esta teoría geométrica, los conjuntos rectificables son ovejas bien comportadas en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué tal si se prescinde de la condición (4) y solo nos quedamos con la condición de finitud para $\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E})$?

En esta situación mucho más general existe un resultado debido a Besicovitch en 1939 y generalizado a cualquier dimensión por Federer en 1947, el cual constituye un teorema paradigmático dentro de esta teoría. La demostración detallada del mismo en el caso que abarca el presente trabajo, puede ser encontrada en Falconer, 1986 (Capítulo 3). Este célebre resultado se conoce como *Teorema de Estructura*:

Teorema 2. *Sea* $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ *con medida de Hausdorff* $\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E}) < \infty$. *Entonces*

$\boldsymbol{E}$**,** *puede ser descompuesto como*

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B},$$

siendo $\boldsymbol{A}$ *rectificable y* $\boldsymbol{B}$ *un conjunto tal que* $I(\boldsymbol{B}) = 0$.

Los conjuntos con medida integro–geométrica $I(\boldsymbol{B}) = 0$ son generalmente llamados conjuntos *puramente no rectificables*. Como se mencionó previamente, estos conjuntos son invisibles en casi todas las direcciones. Un ejemplo revelador de conjunto *puramente no rectificable* es presentado en (Morgan, 2016, p. 32) a partir de un conjunto de Cantor construido sobre el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$. Es muy interesante el hecho de que este conjunto es invisible respecto a toda recta que pasa por el origen, salvo excepcionalmente su proyección sobre la recta de pendiente $\frac{1}{2}$. En esta recta la proyección de dicho conjunto es un segmento de longitud $\sqrt{2}$.

Los conjuntos *puramente no rectificables* son la "parte mala" de los conjuntos con medida de Haudorff $\mathcal{H}^1$ finita, mientras que los conjuntos rectificables (como ya se ha mencionado) son tan bien comportados como las curvas diferenciables, esto último en el sentido ya expuesto en este trabajo. No debe pasarse por alto una conclusión importante e inesperada que se deduce del Teorema 2: todo conjunto $\boldsymbol{E}$ del plano, con $\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E}) < \infty$, tiene recta tangente en casi todos sus puntos en el sentido de la medida integro–geométrica de Favard I. Incluso estos conjuntos muy generales de $\mathbb{R}^2$, poseen recta tangente en todos sus puntos salvo un conjunto básicamente invisible, un polvo caprichoso que se esparce por el plano maliciosamente pero sin llegar a destruirla increíble intuición de los geómetras de la antigüedad.

Por último se debe resaltar que el enfoque expuesto en este trabajo no se limita al caso de conjuntos unidimensionales en el plano. Tanto la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^m$ como la de Favard $\boldsymbol{I^m}$ son perfectamente definibles en espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n > m$. Las nociones de rectificabilidad y plano tangentes aproximados se extienden de manera general a este ambiente de dimensiones superiores. El famoso Teorema de Besicovitch (Teorema 2) sobre la estructura de los conjuntos de medida $\mathcal{H}^1$ finita en $\mathbb{R}^2$ fue generalizado por H. Federer a conjuntos de dimensión arbitraria en Federer (1969).

No obstante, y como era de esperar, el paso a dimensiones superiores implica una complejidad mayor y se hace necesario renunciar a ciertas bondades que poseen los conjuntos unidimensionales. En este sentido, mencionamos un detalle curioso cuya demostración lamentablemente escapa al alcance del presente trabajo: todo conjunto conexo $\boldsymbol{E}$ con medida finita $\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E})$ está contenido en una curva rectificable de longitud no mayor que $2\mathcal{H}^1(\boldsymbol{E})$. Esta propiedad no es en general válida para conjuntos m–dimensionales de $\mathbb{R}^n$. Los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{H}^m(\boldsymbol{E}) < +\infty$, incluso los conexos, están muy lejos de ser conjuntos rectificables.

III. 3 Conclusiones de capítulo

En el trabajo se ha evidenciado cómo la noción de pendiente en su relación con la tangente, conceptos básicos nacidos desde los mismos orígenes de la geometría, han evolucionado hasta reaparecer con toda su fuerza en teorías modernas que combinan nociones geométricas y analíticas. Las herramientas desarrolladas más allá de la geometría diferencial, donde prevalecen funciones de Lipschitz, conjuntos rectificables y puramente no rectificables, permiten extender de manera significativa el concepto de tangencia a conjuntos muy generales que en una primera mirada en nada recuerdan a las curvas diferenciables.

Finalmente, nos atrevemos a decir que en esta generalización de rectas tangentes, que existen en conjuntos incluso imposibles de dibujar, la ideas subyacentes de pendiente y tangente viven en ella como en los inicios de las ciencias matemáticas, solo que a través de una reencarnación algo más sofisticada

Capítulo IV. Estrategia para el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente

En este capítulo se presenta una estrategia, para el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente. La misma está conformada por tres etapas: la elaboración de los instrumentos empíricos para la recogida de información, la aplicación de los instrumentos y el análisis de la información recolectada para identificar, clasificar y valorar los significados. Esta estrategia explora la coherencia entre lo que el profesor intenta transmitir, lo que imagina que transmite y lo que su interlocutor (el estudiante) concibe que se transmite.

Aún persisten dificultades, obstáculos y errores en los docentes relacionados con los aspectos cognitivos y didácticos del concepto de pendiente, (Stump (2001a); Zaslavsky, et al. (2002); Walter y Gerson (2007); Teuscher y Reys (2012); Deniz y Kabael (2017); Cho y Nagle (2017); Byerley y Thompson (2017)). Analizar las dificultades, obstáculos y errores resulta esencial para estudiar los significados para la enseñanza que poseen los profesores con respecto al concepto de pendiente, ya que servirán de referentes para la elaboración de actividades e instrumentos, para su análisis y valoración. Comparar nuestros resultados con los reportados en la literatura, será una medida de la robustez del significado, ya que permitirá establecer la correlación entre lo que el docente intenta transmitir y lo que realmente trasmite.

Los estudios sobre la pendiente muestran el alto grado de dificultad que encierra este concepto, en buena medida esto se debe a la variedad de significados que se le asignan, tanto en la teoría como en la práctica (Stump, 1999; Zaslavsky, et al., 2002; Moore–Russo, Conner, Rugg, 2011a; Mudaly y Moore–Russo, 2011; Nagle y Moore–Russo, 2013; Nagle, Moore–Russo y Styers 2017; Deniz y Kabael, 2017, Rivera et al., 2019; Nagle, et al., 2019).

Cabe destacar que los investigadores en función de favorecer el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente, han identificado diferentes representaciones de la misma asociada a determinados contextos (conceptualizaciones), en particular Stump (1999); Stump (2001a) y Moore–Russo et al. (2011a) quienes determinaron y refinaron las hasta ahora conocidas: la razón algebraica o geométrica, propiedad funcional, de situaciones del mundo real, como indicador de comportamiento, como propiedad física, en forma de coeficiente paramétrico, trigonométrica, analítica, propiedad determinante, como constante lineal.

Esta dispersión conceptual ha resultado útil para identificar la diversidad de significados, así como errores en las formas de razonamientos. Por ejemplo, Rivera et al., (2019) reportan que en algunos casos los alumnos confunden los conceptos de pendiente con la recta misma, o bien desconexión entre aspectos geométricos y variacionales. En gran medida estos hechos constituyen el resultado de carencias en el proceso de enseñanza. Walter y Gerson (2007) plantean que las dificultades en la comprensión del concepto de pendiente, pueden estar condicionadas por los diversos significados que los profesores le asocian a dicho concepto (inclinación, declive, empinada, talud, entre otras). Estos autores también sostienen que el énfasis en la representación asociada con la expresión intuitiva de “subida vs. avance” ha contribuido a las dificultades de los estudiantes para establecer conexiones entre la pendiente, la posición de la línea recta y la razón de cambio, entre otros aspectos.

Por su parte, Nagle et al., (2017) reportan que algunos profesores, al referirse a situaciones físicas, lo hacen sin prestar atención explícita a la conexión entre la pendiente y la inclinación. De forma general, estos estudios reconocen la complejidad que entrañan los mecanismos tanto teóricos como empíricos empleados para captar los significados para la enseñanza, que posee el profesor sobre la pendiente.

Investigaciones recientes han alertado acerca de la necesidad de un abordaje holístico, cuando se trata de estudiar el significado para la enseñanza que poseen los profesores de Matemáticas (Thompson, 2013 y 2016). En el caso particular del concepto de pendiente, ello se expresa en forma de un proceso de comunicación matemática, donde estos tres elementos resultan vitales para una comprensión más objetiva de la enseñanza y del aprendizaje (Byerley y Thompson, 2017). Este enfoque holístico también constituye un referente para la elaboración de actividades e instrumentos, que faciliten la identificación, el análisis y la valoración de los significados para la enseñanza de la pendiente que poseen los profesores.

Las investigaciones ponen de manifiesto que se trata de una problemática compleja, donde la elaboración de estrategias para el estudio de los significados para la enseñanza, que posee el profesor constituye una base importante, antes de emprender un análisis de las causas de estas deficiencias y antes de emprender acciones que permitan solventarlas (Mudaly y Moore–Russo, 2011; Byerley y

Thompson, 2017). Así, nuestro trabajo se centra en la concepción de una estrategia, enfocada hacia el estudio de los significados para la enseñanza del concepto de pendiente, en profesores de matemáticas. La base epistémica fundamental que sustenta esta estrategia reside en el enfoque holístico desarrollado por Thompson (2013), de manera que el significado de pendiente requiere de la identificación de un conocimiento matemático (el qué), de la percepción subjetiva del docente respecto a cómo ello se transmite (el cómo) y el reflejo de este proceso de enseñanza en el aprendizaje (la aprehensión del estudiante, en el sentido de lo que concibe que se está transmitiendo). De manera especial, una estrategia enfocada hacia tales propósitos requiere de instrumentos de diagnóstico que permitan identificar, clasificar y valorar los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente.

IV. 1 Fundamentos teóricos–metodológicos de la estrategia

Esta investigación adopta la concepción sobre el significado, desarrollada por Thompson (2013) y Byerley y Thompson (2017), donde el significado se centra en lo que la persona intenta transmitir a través de una expresión y lo que la persona imagina que se transmite, cuando escuchan un enunciado. Bajo esta mirada el significado tiene un carácter personal, está condicionado por el contexto y se relaciona con la experiencia. De este modo, el significado también se expresa como parte integrante de este contexto y a la vez, constituye un resultado de la propia experiencia. Por tanto, el significado tiene un profundo carácter recursivo y está asociado a una determinada actividad.

La recursividad del significado está relacionada con la teoría piagetiana de esquema, lo cual puede entenderse como una actividad operacional que se repite y se universaliza, de tal modo que resulta aplicable en diferentes situaciones y contextos (Piaget e Inhelder, 1976). A partir de los trabajos de Moreno (1996) y Byerley y Thompson (2017), se asume que un esquema constituye una actividad operacional, asociada con una acción que se orienta hacia la consecución de un objetivo. Para Piaget e Inhelder (1976), comprender es reacomodar un esquema a las estructuras cognitivas que ya se poseen. Por ello, la formación de un significado puede verse como la construcción de un esquema, lo cual requiere aplicar las mismas operaciones de pensamiento repetidamente, con el fin de comprender situaciones que se tornan significativas.

Se coincide con Thompson (2013) cuando afirma, que Piaget consideraba el significado y la comprensión como sinónimos y que son el producto del pensamiento; a partir de este se concede significado a las cosas, se infiere más allá de lo que se percibe y está en relación, esencialmente, con los conceptos, juicios y razonamientos; bases fundamentales para la construcción y el refinamiento de los significados. Cabe destacar que el significado está basado en los esquemas y representaciones que posee la persona (Byerley y Thompson, 2017). Para el presente estudio, las representaciones asociadas con el aspecto operativo del pensamiento, son esencialmente contextuales y pueden comprenderse como un resultado del procesamiento de la información sensorial y conceptual del medio circundante, en la mente del individuo. Ellas se concretan en forma de imágenes, proposiciones e interrelaciones sobre el concepto (Piaget y García, 1991; Moreno 1996). Es justo significar que estas representaciones están dotadas de forma y contenido, e incluso se relacionan estrechamente con los esquemas y, por consiguiente, con los significados.

El significado para la enseñanza planteado por Thompson (2013), pone de manifiesto que el significado que intenta transmitir el profesor, lo hace sobre la base del conocimiento que posee del contenido matemático asociado al concepto y al estudiante; por lo que para estudiar los significados matemáticos para la enseñanza, tendremos en cuenta aquellos que posee el docente sobre la pendiente (lo que intenta transmitir); el conocimiento que posee del estudiante (lo que imagina que el estudiante entiende de lo que intenta transmitir) y lo que el interlocutor (estudiante) concibe que se está trasmitiendo. Resulta oportuno plantear que nuestras bases teóricas y metodológicas están en relación directa, con investigaciones que se ocupan de estudiar las relaciones existentes entre el currículo declarado y el currículo entendido en relación con el concepto de pendiente (Dolores e Ibáñez, 2020; Dolores, Rivera y Moore–Russo, 2020).

Anderson (1984) considera los esquemas como estructuras abstractas de información y a su vez, como formas organizadas y operativas de almacenar información. Este autor identifica tres clases de esquemas fundamentales: el *guion*, como una suerte de rutinas de enseñanza cuya naturaleza es temporal, el *escenario*, que envuelve las circunstancias relacionadas con el salón de clase y las *estructuras proposicionales*, las cuales le permiten al profesor organizar su conocimiento acerca del currículo escolar, del proceso de enseñanza–aprendizaje, del diagnóstico del estudiante, del clima psicosocial, de las acciones didácticas más eficaces, entre otros aspectos. Por tanto, la formación matemática no es el único elemento que incide en la construcción de significados para la enseñanza, pues existen también otros elementos relacionados con la formación didáctica y la experiencia del propio docente (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Como expresión del vínculo entre los esquemas y la construcción de significado, Pérez y Gimeno (1988) han destacado el concepto de esquema de traducción, el cual organiza la transferencia del conocimiento de carácter teórico a esquemas concretos de instrucción. Por este motivo, es posible al menos identificar dos formas fundamentales de las estructuras proposicionales: las preestablecidas y las establecidas. Por ejemplo, un enunciado preestablecido es aquel que el profesor tiene incorporado en su actividad cotidiana, de manera tal que forma parte de sus estructuras conceptuales; es decir, es capaz de establecer relaciones de tipo causa–efecto entre un enunciado y la compleja red de esquemas que ha construido. Un enunciado establecido es aquel que ha sido aprehendido bajo influencia externa, por ejemplo, en el marco de procesos de superación profesional, con el estudio de documentos normativos, con ayuda del intercambio entre colegas, entre otros escenarios.

Según Zaslavsky, Sela y Leron (2002), el 47% de los profesores presentan predisposición hacia los elementos visuales de la pendiente y entienden esta como un índice de inclinación. En su investigación, los autores reportan la existencia de confusión entre los elementos algebraicos y geométricos de la pendiente, la escala y el ángulo. Hoffman (2015) asevera que los profesores participantes en su estudio, consideran preferentemente la interpretación geométrica de la pendiente, ya que el 45% de ellos la asocian con la razón geométrica.

Stump (1999), por su parte, concluye que menos del 20% de los profesores entrevistados en su estudio asocia la pendiente como una relación funcional y también observa, cierta desconexión entre los conceptos de pendiente y de función. Además, este autor observa que las dificultades, obstáculos y errores sobre el concepto de pendiente obedecen, básicamente, a la utilización sistemática de determinadas acciones u operaciones sin plena claridad en sus significados y fundamentos. Estas carencias limitan los horizontes argumentativos, en el sentido de la abstracción reflexiva señalada por Moreno (1996), vista no sólo como proceso cognitivo sino también como un resultado que deja una huella en el pensamiento del profesor. En la medida en que se constriñe la capacidad de ver un mismo concepto desde múltiples ángulos, más angostas son las posibilidades de enseñarlo con efectividad.

Nagle et al. (2013a) aseveran que las respuestas de un grupo de profesores a tareas relacionadas con el concepto de pendiente, ponen de relieve que dicho concepto apenas es entendido como razón de cambio; sin embargo, los estudiantes se referían a la pendiente como un comportamiento de la gráfica. En palabras de Thompson (2013), ello refleja una dificultad en el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente. En la misma dirección Byerley y Thompson, 2017 plantean que un significado es productivo si existe coherencia entre lo que el docente intenta transmitir, lo que imagina que transmite y lo que realmente transmite. Es deseable que la construcción de significados productivos le permita al discente, comprender y dar sentido al conocimiento matemático y a su vínculo con la solución de problemas teóricos y prácticos. El aprendizaje también requiere solidez del conocimiento, expresado en la productividad del significado con el paso del tiempo.

Diamond (2019) observa que los profesores hacen predicciones acerca del conocimiento que los estudiantes tienen sobre las aplicaciones del concepto de pendiente, con base en los significados que supuestamente deberían tener y al saber de su propia experiencia. Para este autor, una condición necesaria para que el profesor pueda guiar la enseñanza en general y en particular la formación de significados productivos en los estudiantes, parte de una comprensión profunda de los significados de los conceptos matemáticos y de la capacidad para reconocer e implementar dichos significados en diversos contextos. Sin embargo, el conocimiento profundo sobre un tema no es suficiente para desarrollar una comprensión eficiente de los diferentes significados en los estudiantes (Ball et al., 2008; Silverman y Thompson, 2008).

El significado tiene un carácter endógeno y contextual, es decir, no puede ser proporcionado, por el contrario, debe construirse a partir de la experiencia del individuo. Dotar de significado a los objetos matemáticos, no puede satisfacerse globalmente ya que para cada contenido de aprendizaje matemático, el significado debe interpretarse constantemente y construirse subjetivamente (Fischer; Malle, 1985). Por lo tanto, al mismo tiempo y en el mismo contexto, profesores o estudiantes pueden tener diferentes significados del mismo concepto matemático (Kilpatrick et al., 2005; Vollstedt, 2011).

Para el logro de este objetivo es necesario considerar otros factores, tales como el conocimiento de los estudiantes, reflejado en cómo los docentes imaginan que estos entienden los enunciados y también el currículo, los textos, la estructura conceptual, sus representaciones e imágenes, el diseño de las actividades, entre múltiples aspectos didácticos. Tomando en consideración las observaciones anteriores, la estrategia se establece sobre cuatro principios que sirven de base para el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores:

- El énfasis en el estudio del profesor no significa desligar su análisis del estudiante. Por el contrario, se explora los significados para la enseñanza con base en el contenido que se transmite, lo que imagina que transmite y lo que realmente se transmite.
- El contenido objeto de estudio consiste en el concepto de pendiente, cuyo significado puede describirse a partir de cuatro esquemas fundamentales: geométricos, analíticos, algebraicos y contextual.
- El estudio de los significados para la enseñanza se erige con apoyo en tres componentes: uno cognitivo relacionado con los esquemas que ponderan la abstracción reflexiva, uno didáctico que contempla las acciones de enseñanza, en función de los objetivos de aprendizaje y uno personológico, que toma en consideración los esquemas comunicativos que se establecen entre el docente y el discente. Por tanto, este último se manifiesta en forma de relación entre los dos primeros componentes.
- Los enunciados se estudian en el plano cognitivo y se clasifican en preestablecidos y establecidos. Sin embargo, ellos pueden manifestarse en el plano didáctico.

La Figura 12 ilustra los elementos para el estudio de los significados para la enseñanza en el contexto de la Educación Matemática.

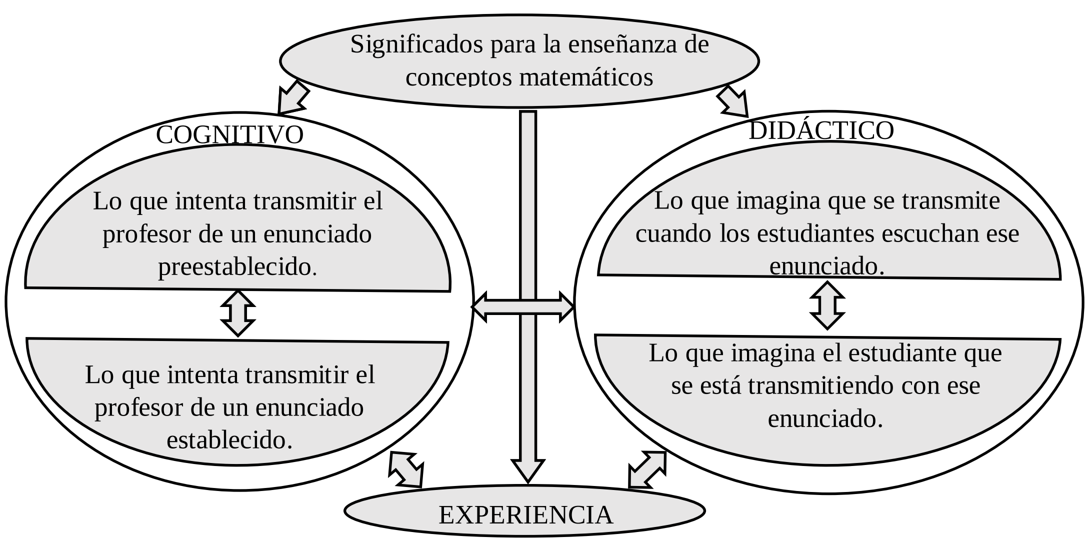


Figura 12: Elementos de los significados para la enseñanza
Fuente: Elaboración propia

La estrategia consta de tres etapas:

Etapa de elaboración. En esta etapa los investigadores relacionan los posibles significados asociados al concepto objeto de estudio, elaboran los instrumentos para el análisis de los significados con ayuda de actividades, problemas, encuestas, entrevistas semiestructuradas, entre otros aspectos. Para la evaluación y perfeccionamiento de los instrumentos, resulta útil su valoración por parte de un panel de expertos, la implementación de un estudio piloto, o bien la combinación de ambos métodos.

Los profesores establecen sus esquemas y significados como resultado y como proceso de abstracción reflexiva, en estrecha relación con su experiencia (Ball et al., 2008). Por tal motivo, la determinación de los elementos a diagnosticar con ayuda de instrumentos empíricos, no puede separarse de los posibles esquemas cognitivos y didácticos. Asimismo, los esquemas de contenido matemático están estructurados sobre la base del dominio de conceptos, teoremas, procedimientos, métodos, notaciones y representaciones. Particularmente, los significados asociados al contenido matemático de la pendiente se clasifican de manera sintética en esquemas geométricos, algebraicos, analíticos y contextuales, con las siguientes especificaciones que operacionalizan la estrategia en el plano cognitivo y que pueden ponerse de manifiesto de modo establecido o preestablecido:

- Esquema geométrico es aquel donde el concepto de pendiente, se caracteriza con ayuda de conceptos tales como ángulo de inclinación, razón entre las longitudes de catetos de un triángulo rectángulo formado con dos puntos de una recta y las respectivas diferencias de sus proyecciones, la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal de un punto, entre otros elementos propios del ámbito de la geometría.
- Esquema algebraico es aquel donde el concepto de pendiente, se expresa por intermedio de representaciones relacionadas con la razón de cambio, entre valores de ordenada (dominio) y abscisa (imagen) de una función lineal. En esencia, el énfasis se pone en calcular el valor de m en la ecuación $y = mx + n$ $(m, n \in \mathbb{R})$, o bien de calcular una razón del tipo $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Esquema analítico es aquel donde el concepto de pendiente, se relaciona con conceptos tales como la derivada de una función en un punto, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, el límite de la pendiente de las secantes a una curva en un punto, la razón de cambio instantánea para una función cualquiera, la rapidez de cambio de la función en un punto (la mejor aproximación lineal de una curva en la vecindad del punto, es la recta tangente en dicho punto), entre otros elementos del análisis matemático.

- Esquema contextual es aquel donde se pondera el valor instrumental del concepto de pendiente, en el sentido de su utilidad para resolver problemas matemáticos o del mundo real y bajo una doble mirada: de modelación y de aplicación.

Por su parte, los esquemas didácticos se centrarán en elementos relacionados con el conocimiento del currículo, metodológico y del estudiante. La estrategia diferencia lo que se intenta transmitir, lo que se imagina que transmite y lo que realmente se transmite, donde el contenido didáctico se expresa en objetivos curriculares, contenidos matemáticos, métodos y medios de enseñanza, formas organizativas del proceso de enseñanza–aprendizaje. De forma particular, el contenido explícito que se refleja en un syllabus (lo normativo) no necesariamente coincide con el contenido enseñado de manera plena (Dolores e Ibáñez, 2020; Dolores et al., 2020; Nagle y Moore–Russo, 2014).

Etapa de implementación. Aquí se aplican los instrumentos elaborados en la etapa anterior y se recoge la información a través de un proceso sistemático, planificado y ordenado. De gran utilidad resultan las tecnologías de la información y las comunicaciones, de manera que el diligenciado de una encuesta pueda efectuarse en un momento adecuado a criterio del profesor. Asimismo, las entrevistas pueden desarrollarse en tiempo real, pero también pueden organizarse en forma de salas de chat o en foros interactivos sincrónicos o asincrónicos. Un elemento importante está dado por la necesidad de que los participantes desplieguen una actitud colaborativa y abierta.

Lo anterior puede lograrse tomando como base una adecuada selección de cada individuo, el respeto irrestricto a la confidencialidad, el empleo óptimo del tiempo, la creación de alicientes que incentiven la motivación, entre otros aspectos. Particularmente, un incentivo puede estar dado por la entrega o sorteo de estímulos materiales, por la formalización de reconocimientos, por el empoderamiento de los participantes en el sentido de hacerlos partícipes de su propio desarrollo profesional, por la retroalimentación acerca de los resultados del estudio, entre otras posibilidades. Estos últimos aspectos de la etapa de implementación, también son útiles en el trabajo con el panel de expertos, durante la etapa anterior.

Etapa de análisis. En esta etapa final se procesa la información recolectada para identificar, clasificar y valorar los significados para la enseñanza. Un significado para la enseñanza se cataloga como productivo si existe suficiente coherencia entre lo que el profesor intenta transmitir, lo que imagina que transmite y lo que realmente transmite. Por este motivo, es importante triangular la información aportada por los diferentes instrumentos. De igual modo es importante identificar deficiencias de orden cognitivo o didáctico, con el fin de emprender acciones de mejora. Esta etapa también sirve de dispositivo para la retroalimentación sobre las etapas anteriores, de manera que se puede perfeccionar la estrategia continuamente y también de adecuarla a nuevos escenarios de investigación didáctica.

Seguidamente, se describe la aplicación parcial de la estrategia, centrada en la primera etapa de elaboración. Con base en los principios y componentes cognitivo y didáctico, se diseñó un cuestionario, una entrevista semiestructurada y una grupal que se somete a consideración de los expertos y finalmente se discuten los resultados de esta aplicación parcial de la estrategia antes descrita.

IV. 2 Conclusiones del capítulo

La estrategia presentada se ha enfocado hacia el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los docentes, en relación al concepto de pendiente. Su base estructural comprende tres etapas de elaboración, implementación y análisis, mientras que sus componentes funcionales incluyen lo cognitivo, lo didáctico y lo personológico. De esta manera se explora el grado de coherencia que tiene lugar entre lo que el docente intenta transmitir, lo que imagina que transmite y lo que el discente concibe que se transmite como producto de un canal comunicativo de enseñanza–aprendizaje. Un énfasis marcado se pone en el proceso de abstracción reflexiva, el cual transcurre en el componente cognitivo, donde los enunciados relacionados con el concepto de pendiente se manifiestan de manera establecida o preestablecida. Todo ello constituye un avance en la comprensión de los esquemas que se configuran alrededor de este concepto matemático. Este hecho les provee a los resultados descritos un valor argumentativo, desde una perspectiva teórica en educación matemática.

Capítulo V. Validación de la estrategia para el estudio de los significados sobre el concepto de pendiente en los profesores

En capítulo tiene dos grandes objetivos, dividido en dos epígrafes:

- El primero, Epígrafe V. 1, en función de analizar la factibilidad de la estrategia propuesta para el estudio de los significados para la enseñanza asociada con la calidad estructural y funcional de los componentes instrumentales de la estrategia, en tal dirección se presenta un estudio de su evaluación ante un panel de expertos.

- El segundo, Epígrafe V. 2, se explora el grado en que se manifiestan los significados analítico, algebraico, geométrico y contextual del concepto de pendiente en profesores universitarios de matemáticas.

Para el análisis y valoración de los resultados nos apoyamos desde el punto de vista matemático en una técnica para la representación del ordenamiento por similitud, respecto a la solución ideal (TOPSIS), basada en datos difusos.

V. 1 Factibilidad de la estrategia para el estudio de los significados para la enseñanza

Objetivos y participantes. El conjunto de instrumentos antes mencionado se puso a disposición de un panel de expertos para su valoración conforme a los indicadores preestablecidos y así corroborar su factibilidad para el estudio de los significados para la enseñanza del concepto de pendiente que poseen los profesores. En el estudio participan tres actores: los propios investigadores, bajo el rol de establecimiento de acciones para el diseño de instrumentos; 17 profesores universitarios de matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero, de manera voluntaria sin recibir retribución monetaria, los cuales reciben y diligencian los instrumentos de carácter individual y participan en la instrumentación de carácter colectivo (estudio piloto); así como un panel previo de 12 expertos quienes evalúan el conjunto de instrumentos, a partir de su análisis y de los resultados mostrados tras la aplicación preliminar.

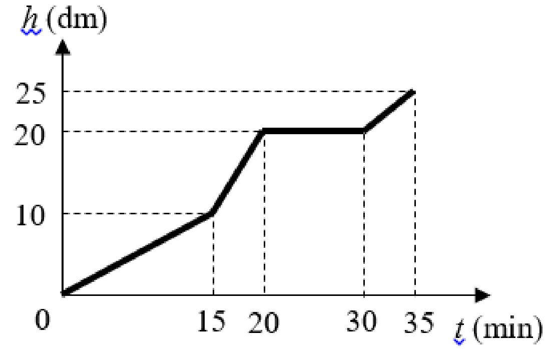
Elaboración y pilotaje de los instrumentos. Las tareas que componen los instrumentos que se presentan para el estudio de los significados para la enseñanza de la pendiente que poseen los profesores se elaboraron sobre la base de los elementos que conforman dicho significado (cognitivo y didáctico). El cuestionario va dirigido a explorar los significados matemáticos de los profesores; en este contexto el significado del concepto se concreta en una descripción precisa y universal de una idea. La entrevista semiestructurada se diseñó con la finalidad de obtener información sobre cómo los profesores prevén transmitir el significado del concepto a sus estudiantes en el contexto didáctico–escolar. La entrevista grupal se elaboró para profundizar en los elementos que conforman los significados para la enseñanza; así como integrar y sistematizar la información obtenida de los otros dos instrumentos.

Las preguntas presentadas a los profesores se seleccionaron y diseñaron en función de estimular (explícita o implícitamente) en los docentes los significados asociados a la pendiente en diferentes contextos. Además, dichas preguntas son el resultado de la labor docente e investigativa de los autores (con más de 25 años en la docencia universitaria) y de las siguientes investigaciones (Stump, 2001a, 2001b; Zaslavsky et al., 2002; Cho y Nagle, 2017; Thompson 2013; Byerley y Thompson, 2017; Diamond, 2019; Dolores et al., 2020). De las preguntas planteadas en este estudio piloto, se esperaba que sus respuestas revelaran los diferentes significados del concepto de pendiente. Las Tareas 1, 2 del cuestionario modelan situaciones asociadas, esencialmente, con significados geométricos y algebraicos, en general, se esperaba que para su soluciones los profesores recurrieran a la razón entre el cateto vertical y el cateto horizontal del triángulo rectángulo cuya hipotenusa yace sobre la recta, la pendiente como el desplazamiento vertical por cada unidad de desplazamiento horizontal y la razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de dos puntos que pertenecen a la recta. De las Tareas 4 y 5 se esperaban respuestas asociadas con significados analíticos: la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, la razón de cambio de la función en un punto, velocidad instantánea.

El primer instrumento consiste en un cuestionario, cuyo objetivo es indagar acerca de los elementos cognitivos de los profesores sobre el significado del concepto de pendiente. El encabezamiento del instrumento ha sido omitido y solo se presenta la batería de cuatro preguntas.

Contenido del cuestionario

i. La gráfica muestra la altura que va alcanzando el agua durante el proceso de llenado de un tanque, a partir del momento en que se abre una llave y durante ciertos intervalos de tiempo hasta que el tanque se llena totalmente.



a. ¿Se detuvo el proceso de llenado en algún momento? ¿Durante qué tiempo?

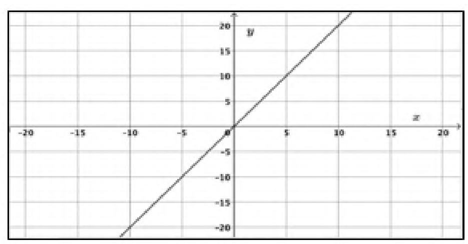
b. ¿Con qué rapidez se llena el tanque durante los primeros 15 minutos?

c. Seleccione la respuesta correcta y fundamente: "A los 18 minutos el agua tenía una altura de (A) __19 dm, (B) __16 dm, (C) __15 dm, (E) __18 dm".

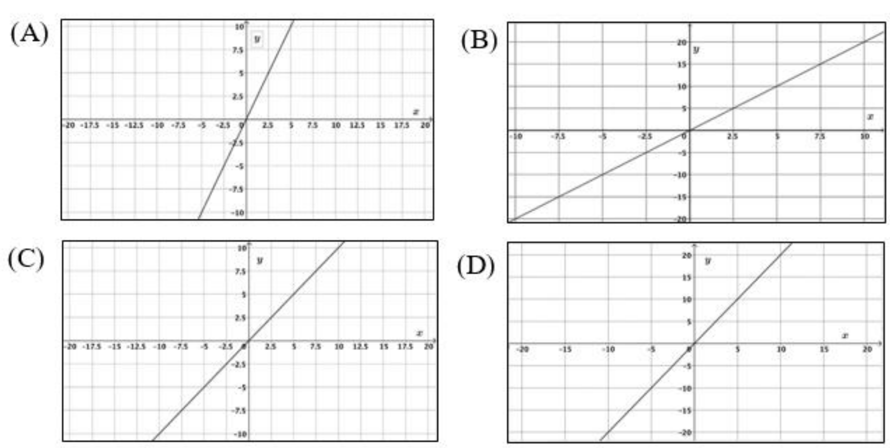
d. ¿En cuál tramo la altura del agua cambió más rápidamente?

e. Determine la función que modela el proceso representado en la gráfica.

ii. Considere la siguiente gráfica:



Justifique cuál o cuáles de las siguientes rectas tiene la misma pendiente que la recta ilustrada en la gráfica anterior.



iii. Dos corredores comienzan una carrera al mismo tiempo y terminan en empate. Probar que en algún momento de la carrera ambos corredores alcanzan la misma velocidad.

iv. Dada la ecuación $dy/dx = f(x,y)$, diga cuál o cuáles de los enunciados siguientes considera correcto o incorrecto y justifique en cada caso.
   a. La derivada de una cierta función en cada punto del plano es $f(x,y)$.
   b. La pendiente de una función en cada punto del plano donde existe el valor de f, es exactamente el valor de f en dicho punto.
   c. La ecuación determina en cada punto donde existe el valor de f, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva solución en este punto.
   d. La razón de cambio de una función con respecto a la variación del valor de la variable independiente es $f(x,y)$.

v. Un número $a \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto fijo de la función f si $f(a) = a$. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ y tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f tienen a lo sumo un punto fijo.

El segundo instrumento consiste en una entrevista semiestructurada, compuesta por una batería de siete preguntas. Este dispositivo se dirigió al plano didáctico y su objetivo consiste en conocer los significados para la enseñanza que poseen los profesores seleccionados, acerca del concepto de pendiente. Durante la fase de presentación, además de presentar los objetivos, declarar la confidencialidad, y crear condiciones de *rapport*, se debate brevemente acerca del concepto de significado, en un sentido básicamente intuitivo.

Contenido de la entrevista semiestructurada

i. ¿Considera usted que los significados de los conceptos matemáticos inciden en el desempeño de los estudiantes? ¿Por qué?

ii. ¿Qué significados le atribuye usted al concepto de pendiente? ¿Lo considera un concepto esencial en la formación matemática? ¿Por qué?

iii. ¿Con qué conceptos se relaciona el concepto de pendiente? Por favor, describa esta relación a través de un mapa conceptual.

iv. Formule un enunciado (una proposición, un problema) que contenga el concepto de pendiente y explique qué significados tiene este para usted. ¿Cómo lo explicaría a sus estudiantes? ¿Qué imagina usted que entenderán sus estudiantes?

v. ¿Cuáles de los significados antes mencionados sobre el concepto de pendiente (pregunta *i*) trata usted en clases? ¿Por qué?

vi. ¿Qué dificultades se presentan en la enseñanza de la pendiente? ¿A qué causas atribuye estas?

vii. ¿Cómo usted enseña el concepto de pendiente a sus estudiantes?

El tercer instrumento consiste en una guía de seis preguntas para una entrevista grupal. El objetivo consiste en socializar el problema de investigación e identificar puntos de vista comunes acerca de los significados del concepto de pendiente y los esquemas que se transmiten del docente al discente.

Contenido de la entrevista grupal

i. ¿Qué significado tiene para usted el término "pendiente" y la expresión "la pendiente de una función lineal"?

ii. ¿Considera usted a la pendiente un concepto complejo para sus estudiantes? ¿Por qué?

iii. ¿Explicite en qué contextos puede aparecer el concepto de pendiente? ¿Alguno más?

iv. Dado los siguientes enunciados:

a. Se denomina pendiente o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

b. Se denomina línea recta al lugar geométrico de los puntos, tales que tomados dos cualesquiera de ellos $P_1\ (x_1\ , y_1)$ y $P_2\ (x_2\ , y_2)$, el valor de la pendiente m calculado por medio de la fórmula $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, con $x_1 \neq x_2$ resulta siempre constante.

c. La función $y = f(x)$ no tiene tangente horizontal.

¿Qué trasmite cada uno de los enunciados anteriores? ¿Qué podrían entender los estudiantes?

v. Considere el siguiente problema: un corredor recorrió una pista de 6 km en 45 minutos. ¿En algún momento del recorrido el corredor alcanzó la velocidad de 8 km/h? ¿Qué respuestas podrían dar los estudiantes? ¿Cuáles serían sus posibles interpretaciones?

vi. Formule un enunciado (afirmación, proposición, problema) en el que esté involucrado el concepto de pendiente. ¿Qué es lo que este trasmite? ¿Qué podrían interpretar los estudiantes?

El cuestionario se aplicó en el escenario de la UAGro en el horario de la mañana. Seguidamente se realizan las entrevistas semiestructuradas de forma individual, y luego la grupal en el mismo lugar, procurando un ambiente diáfano y constructivo, en el sentido de explorar aspectos de interés común relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de pendiente. La información diligenciada se digitaliza íntegramente, y las intervenciones en ambas entrevistas se registran de forma taquigráfica. Todos estos elementos constituyen las evidencias del estudio piloto.

Selección del panel de expertos. La identificación de los expertos constituye un aspecto de singular importancia, ya que la opinión de estos provee información útil para la toma de decisiones de naturaleza investigativa. No solo se trata de buscar representatividad y profundidad analítica en el panel, sino también de lograr disposición a participar y permanencia en el proceso (Cruz, 2009). La selección se realiza con ayuda de la red académicas *Research Gate*, tomando en consideración tres requisitos mínimos: experiencia docente en la educación matemática universitaria de al menos una década, experiencia investigativa relacionada con la realización de estudios teórico–experimentales y que se manifieste en al menos diez artículos publicados en revistas arbitradas del campo de la educación matemática, y un índice $RG \geq 8$. El *RG Score* es un coeficiente de reputación que calcula esta red académica, a partir del total de documentos publicados y de su impacto, de las respuestas a preguntas que otros usuarios formulan dentro de su campo de investigación, del número de citas, de la cantidad de citas, seguidores y recomendaciones, principalmente.

Valoración de los instrumentos y los resultados del pilotaje por el panel de expertos. Cada experto seleccionado recibió una invitación formal a participar, una explicación pormenorizada del proceso, así como el testimonio de absoluta confidencialidad. Para el intercambio de información se utiliza el servicio de mensajería electrónica. El panel recibe copia de los tres instrumentos, así como las evidencias digitalizadas del estudio piloto. También se entregó un formulario provisto de una matriz de $4{\times}4$, donde cada fila corresponde a los tres instrumentos de forma individual y a su conjunto como un todo. Las columnas constituyen indicadores a evaluar, con ayuda de una escala ordinal de siete categorías lingüísticas: $\text{Muy bajo} < \text{Bajo} < \text{Medianamente bajo} < \text{Medio} < \text{Medianamente alto} < \text{Alto} < \text{Muy alto}$. Los indicadores de evaluación seleccionados son los siguientes: C_1 = pertinencia, C_2 = calidad, C_3 = efectividad, y C_4 = relevancia.

La pertinencia se adopta en el sentido de la valoración experta, acerca del nivel de conveniencia del elemento evaluado para seleccionarse definitivamente en un estudio de la presente naturaleza (aspecto de selección). Por ejemplo, un instrumento puede ser relevante por captar información fiable para un estudio científico (aspecto de contenido), puede contar con calidad por la estructura y rigor de las preguntas seleccionadas (aspecto de forma), incluso puede resultar efectivo en el contexto de su implementación y en el proceso comunicativo investigador/investigado (aspecto de funcionabilidad). Sin embargo, puede carecer de suficiente pertinencia por redundar en elementos que otro instrumento captó. Si bien estos criterios pueden tener alguna zona de solapamiento, su conjunto ayuda a formar un criterio aproximado sobre los aspectos evaluados, bajo la escala lingüística establecida. Para disminuir este riesgo, como complemento cualitativo, se solicitó finalmente a los expertos que expresen libremente otros criterios, a fin de enriquecer cada valoración.

Procesamiento de la información aportada por el panel de expertos. Para el procesamiento de la información se implementó la técnica para la representación del ordenamiento por similitud respecto a la solución ideal, conocida como TOPSIS por sus siglas en inglés (Hwang y Yoon, 1981). En su versión clásica, esta técnica procesa información multicriterio para identificar la mejor solución a un problema, o bien para jerarquizar un conjunto preliminar de variantes de solución. El principio básico consiste en que la alternativa más adecuada muestra la menor distancia posible respecto a la solución ideal positiva, así como la mayor distancia posible respecto a la solución ideal negativa. Los aspectos a evaluar son cuatro: A_1 = cuestionario, A_2 = entrevista semiestructurada, A_3 = entrevista grupal, y A_4 = los tres instrumentos como conjunto, conforme a los cuatro criterios establecidos y en la escala lingüística prefijada.

Ya que la información que proviene del conocimiento experto es flexible y subjetiva, se utiliza un enfoque borroso para el procesamiento de datos con la técnica antes mencionada (Park et al., 2011). Además, cada categoría evaluativa tiene forma de variable lingüística, razón por la cual se "fuzzifica" con ayuda de una correspondencia biunívoca propuesta por Wang y Lee (2009), la cual se ilustra en la Tabla 3.

Tabla 3. Escala lingüística y su correspondiente fuzzificación

Categoría lingüística	Abreviatura	Número difuso triangular
Muy bajo	MB	(0, 0, 0.2)
Bajo	B	(0.05, 0.2, 0.35)
Medianamente bajo	mB	(0.2, 0.35, 0.5)
Medio	M	(0.35, 0.5, 0.65)
Medianamente alto	mA	(0.5, 0.65, 0.8)
Alto	A	(0.65, 0.8, 0.95)
Muy alto	MA	(0.8, 1, 1)

(Fuente: adaptado de Wang y Lee, 2009, p. 8983)

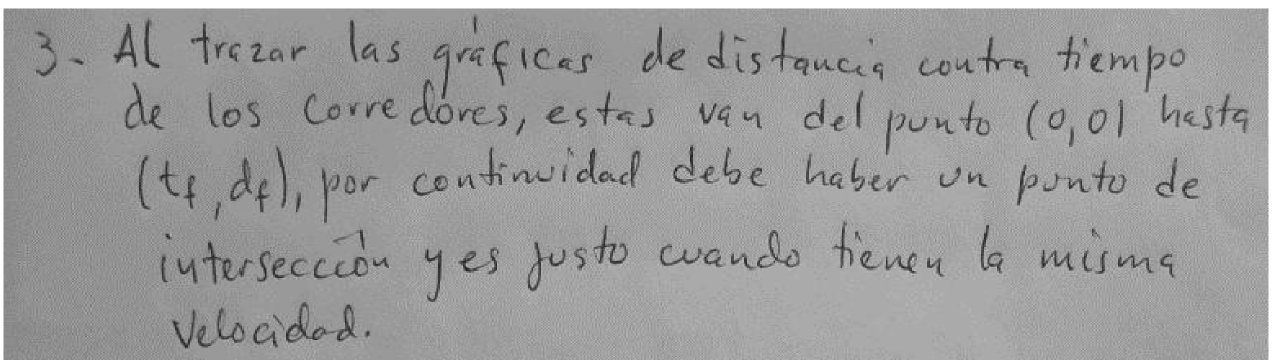
Siguiendo a Wang y Lee (2009), después de fuzzificar la información experta se jerarquizan los aspectos evaluados A_i $(1 \leq j \leq n)$, a partir de los criterios o indicadores preestablecidos C_i $(1 \leq i \leq m)$. Cada respuesta del experto E_k $(1 \leq k \leq l)$ constituye una matriz borrosa contentiva de $m \times n$ números difusos triangulares, o sea, $\tilde{x}_{ij}^{(k)} = \left(a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k\right)$. Luego se promedian todas las evaluaciones para formar una matriz borrosa de decisión $\widetilde{D} = \left[\tilde{x}_{ij}\right]_{m \times n}$, donde $\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{l}\left(\tilde{x}_{ij}^{(1)} + \tilde{x}_{ij}^{(2)} + \cdots + \tilde{x}_{ij}^{(l)}\right) = \left(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}\right)$ y seguidamente se construye la matriz normalizada $\tilde{R} = \left[\tilde{r}_{ij}\right]_{m \times n}$, donde $\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^+}, \frac{b_{ij}}{c_j^+}, \frac{c_{ij}}{c_j^+}\right)$, y $c_j^+ = \max\{c_{ij}\}$.

Ya que no se ponderan los valores normalizados, estos se disponen en orden creciente de manera directa, para cada criterio C_j por separado. De esta forma resultan sendas soluciones ideales: una positiva $A^+ = (\tilde{r}_1^+, \tilde{r}_2^+, \dots, \tilde{r}_n^+)$ y otra negativa $A^- = (\tilde{r}_1^-, \tilde{r}_2^-, \dots, \tilde{r}_n^-)$, donde $\tilde{r}_j^+ = \max\{\tilde{r}_{ij}\}$ y $\tilde{r}_j^- = \min\{\tilde{r}_{ij}\}$. A continuación, para cada aspecto i se calculan las distancias i–ésimas respecto a las soluciones ideales positiva y negativa: $d_i^+ = \sum_{j=1}^n d\left(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^+\right)$ y $d_i^- = \sum_{j=1}^n d\left(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^-\right)$, donde d es la distancia euclidiana normalizada. Finalmente, los coeficientes de proximidad vienen dados por la expresión $CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-} \in [0,1]$, donde $1 \leq i \leq m$. Ello facilita jerarquizar los aspectos evaluados en el presente estudio, donde $m = n = 4$. Seguidamente se complementa esta jerarquización de los aspectos evaluados con la información cualitativa que aportan los expertos.

V. 1.1 Resultados y discusión

El estudio piloto corroboró los altos niveles de complejidad que entraña el estudio de los significados del concepto de pendiente. Principalmente se observan dificultades relacionadas con el significado que los docentes le asocian a algunas de las exigencias planteadas en los instrumentos; lo que revela un análisis descontextualizado de las situaciones problémicas presentadas. Los profesores manifiestan un conflicto cognitivo, en cuanto al significado de la pendiente bajo un cambio de escala del sistema de coordenadas. También se presenta confusión entre los aspectos funcionales y los aspectos asociados a la razón de cambio instantánea, significado analítico de la pendiente.

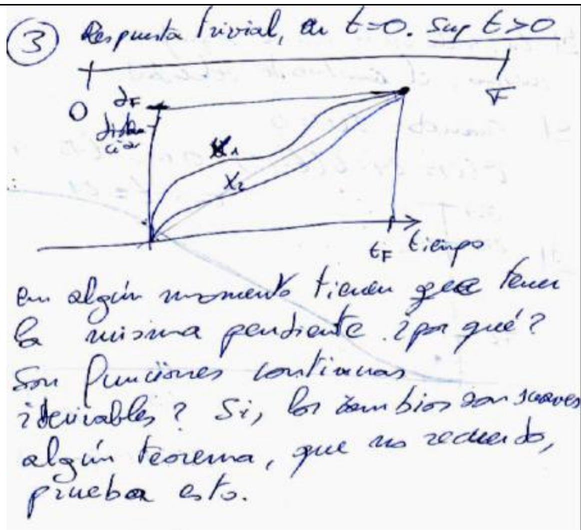
A título de ejemplo, cabe mencionar que el 40% de los profesores participantes en la prueba piloto asumió en su respuesta al tercer problema del cuestionario que, si los corredores ocupaban la misma posición en algún momento, entonces tendrían la misma velocidad. He aquí la respuesta del profesor P7:


3.- Al trazar las gráficas de distancia contra tiempo de los corredores, estas van del punto (0,0) hasta (t_f, d_f), por continuidad debe haber un punto de intersección y es justo cuando tienen la misma velocidad.

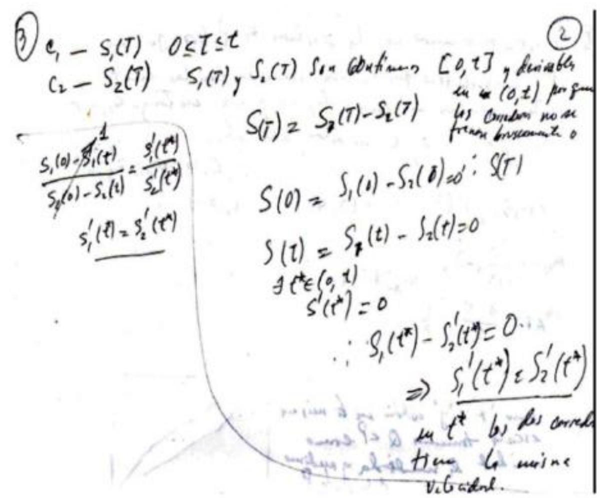
(Fuente: elaboración propia con resultados del estudio piloto)

Nótese que P7, en lugar de orientar su razonamiento hacia la búsqueda de una igualdad de pendientes, desvirtúa erróneamente su reflexión hacia la localización de un punto de intersección entre sendas curvas continuas.

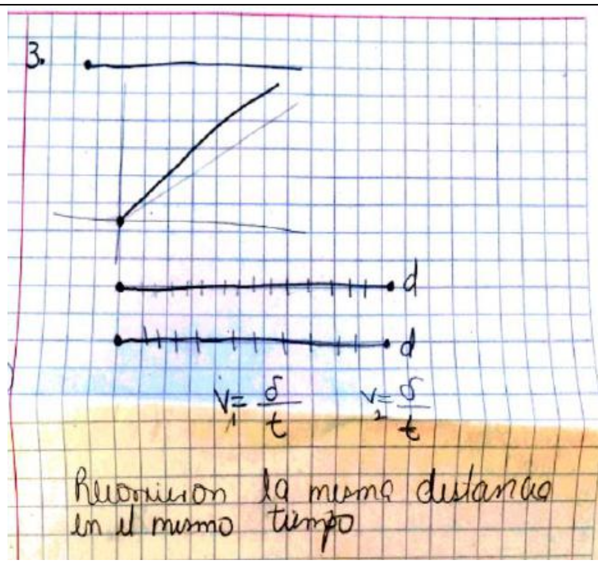
La Figura 13 contiene otras respuestas ilustrativas de los profesores al problema 3.



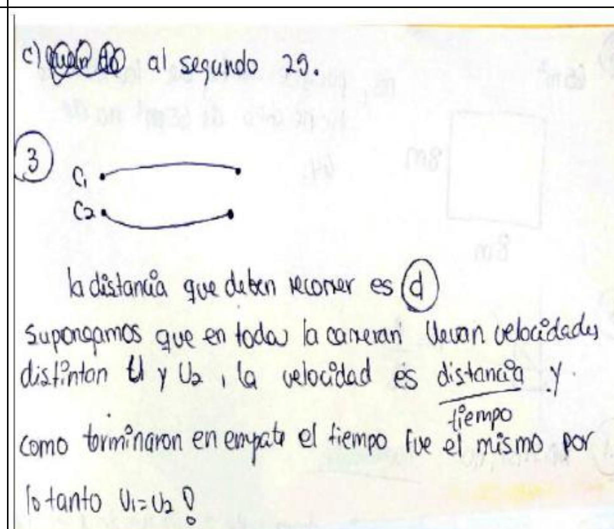
P1



P5



P6



P9

Figura 13: Ejemplos ilustrativos Tarea 3

(Fuente: elaboración propia con resultados del estudio piloto)

Las dificultades son típicas: modelación aproximada del problema y descripción del razonamiento en forma incompleta (P1), desarrollo de un esquema analítico con descuido de los procesos de límite que acompañan al cociente incremental (P5), respuesta trivial por ausencia de comprensión plena del problema (P6), y confusión de los conceptos de velocidad instantánea y de velocidad media (P9). Todas las respuestas se digitalizaron con el objetivo de que los expertos contaran con un complemento de aplicación preliminar del conjunto de instrumentos elaborados.

De forma preliminar, con base en una búsqueda automatizada en *Research Gate* se identificaron 21 expertos potenciales, los cuales también poseen relaciones de trabajo científico con la UAGro, de forma directa o indirecta, y cumplen con los criterios de selección preestablecidos. El proceso transcurrió durante un periodo de confinamiento, a causa de la eventualidad causada por la COVID–19. Tras cumplirse un mes de haber solicitado la evaluación, se recibió respuesta de cerca de la mitad de los expertos. Se envió un recordatorio y se dio por culminado el proceso al transcurrir otras dos semanas. En total, se recibieron las evaluaciones de 13 expertos, de las cuales se desecha una por problemas en el llenado del formulario. Definitivamente, se compilaron las respuestas de 12 expertos ($l = 12$; 7 hombres y 5 mujeres), los cuales son todos doctores en educación matemática, y laboran en instituciones universitarias latinoamericanas como docentes de matemáticas superiores, con 13.5 años de experiencia promedio en esta actividad y un coeficiente de reputación promedio $RG \approx 8.7$. Además, pudo verificarse un índice de Hirsch promedio $H \approx 9.2$ en *Google Scholar*.

El diligenciado de la matriz evaluativa alcanzó un coeficiente de Cronbach fiable ($\alpha = 0.71$), conforme a la escala sugerida por Cohen, Manion, y Morrison (2007). El conteo de las evaluaciones de cada aspecto evaluado (A_1 = cuestionario, A_2 = entrevista semiestructurada, A_3 = entrevista grupal, y A_4 = conjunto de instrumentos), conforme a los criterios prefijados (C_1 = pertinencia, C_2 = calidad, C_3 = efectividad, y C_4 = relevancia), permitió observar que la mayoría de estas se ubican entre las categorías de medianamente alto, alto y muy alto.

Siguiendo la columna de los totales por categoría, las evaluaciones comprenden el 95.83%, 95.83%, 93.75%, y 93.75% de las tres categorías superiores en la escala adoptada, respectivamente. Los resultados descriptivos aparecen descritos en la Tabla 4. Las categorías con frecuencias completamente nulas han sido eliminadas.

Tabla 4. Tabla de frecuencias de las evaluaciones otorgadas por el panel de expertos

Aspecto evaluado	Categoría	Indicadores de evaluación				Total
		Pertinencia	Calidad	Efectividad	Relevancia	
Cuestionario	B	1	1	0	1	3
	mA	1	3	3	2	9
	A	3	1	0	0	4
	MA	7	7	9	9	32
	Total	12	12	12	12	48
Entrevista semiestructurada	M	1	0	0	1	2
	mA	2	1	3	0	6
	A	3	5	0	1	9
	MA	6	6	9	10	31
	Total	12	12	12	12	48
Entrevista grupal	mB	1	0	0	1	2
	M	0	0	0	1	1
	mA	2	3	3	4	12
	A	2	3	2	1	8
	MA	7	6	7	5	25
	Total	12	12	12	12	48
Conjunto de instrumentos	M	0	0	2	0	2
	mA	2	3	0	4	9
	A	3	2	4	1	10
	MA	7	7	6	7	27
	Total	12	12	12	12	48

Después de promediar las evaluaciones de cada experto, se obtuvo la matriz difusa de evaluación, cuyos componentes normalizados aparecen en la Tabla 5.

Tabla 5. Matriz difusa normalizada

Aspectos evaluados	Pertinencia	Calidad	Efectividad	Relevancia
Cuestionario	(0.52, 0.81, 0.91)	(0.40, 0.75, 0.78)	(0.39, 0.63, 0.78)	(0.41, 0.66, 0.81)
Entrevista semiestructurada	(0.47, 0.74, 0.88)	(0.42, 0.68, 0.80)	(0.40, 0.64, 0.79)	(0.41, 0.65, 0.81)
Entrevista grupal	(0.49, 0.77, 0.89)	(0.36, 0.58, 0.75)	(0.35, 0.57, 0.75)	(0.41, 0.65, 0.80)

Conjunto de instrumentos	(0.46, 0.74, 0.84)	(0.36, 0.60, 0.74)	(0.40, 0.64, 0.79)	(0.38, 0.62, 0.78)
$\tilde{r}_j^-$	(0.46, 0.74, 0.84)	(0.36, 0.58, 0.74)	(0.35, 0.57, 0.75)	(0.38, 0.62, 0.78)
$\tilde{r}_j^+$	(0.52, 0.81, 0.91)	(0.42, 0.75, 0.80)	(0.40, 0.64, 0.79)	(0.41, 0.66, 0.81)

(Fuente: elaboración propia)

Luego se calculan las distancias respecto a las soluciones ideales positiva y negativa, lo cual permite determinar cada coeficiente de proximidad CC_i. La Tabla 6 muestra los valores definitivos.

Tabla 6. Jerarquización de los aspectos evaluados con base en los coeficientes de proximidad

Aspectos evaluados	$\boldsymbol{d_i^-}$	$\boldsymbol{d_i^+}$	$\boldsymbol{CC_i}$	**Jerarquización**
Cuestionario	0.0604	0.1634	0.2697	4
Entrevista semiestructurada	0.1730	0.0580	0.7489	2
Entrevista grupal	0.0622	0.1624	0.2769	3
Conjunto de instrumentos	0.1899	0.0331	0.8517	1

(Fuente: elaboración propia)

Respecto a los resultados de la opinión cualitativa solicitada a los expertos, los elementos estuvieron relacionados con la corrección y mejoramiento de aspectos estructurales en forma puntual. Los elementos más recurrentes fueron tres: (1) otorgar a los participantes la posibilidad de añadir libremente algún otro aspecto, (2) emplear recursos audio–visuales para facilitar la comprensión, como en el caso del problema de la pregunta *v* en la entrevista grupal, y (3) diseñar un cuarto dispositivo que permita complementar la información con los argumentos de los estudiantes.

La metodología implementada puso a disposición de un panel de expertos los resultados de un estudio piloto, el cual apenas considera un segmento de las etapas de elaboración e implementación en la estrategia propuesta. Se pudo aprecia la existencia de algunas limitaciones asociadas al número relativamente limitado de profesores participantes en el estudio piloto, lo cual redujo las posibilidades de contar con un amplio espectro de respuestas que ilustre los esquemas de pensamiento del docente. Si bien la aplicación del instrumento reflejó fiabilidad, su valor rebasa escasamente el límite mínimo sugerido por Cohen, Manion y Morrison (2007), donde $\alpha = 0.7$. Asimismo, la también restringida cantidad de expertos reduce el grado de generalización de sus consideraciones evaluativas, y consecuentemente la validez externa.

Sin embargo, existen aspectos que proveen al estudio de cierto grado de validez nominal o de contenido, en el sentido de Malhotra, Nunan y Birks (2017). Por ejemplo, la matriz evaluativa refiere los tres instrumentos de forma independiente y también su conjunto como un todo, lo cual posibilita una evaluación holística de la parte instrumental en la estrategia. Los cuatro indicadores seleccionados (pertinencia, calidad, efectividad y relevancia) aportan información amplia y valiosa que enriquece esta evaluación. Aunque su número dista de ser exhaustivo, aspectos importantes como el rigor y la síntesis ya quedan enmarcados dentro del indicador de calidad. Por su parte, la pregunta abierta complementa cualitativamente la evaluación de cada experto, y ello permite considerar aspectos vinculados también a la parte conclusiva de la estrategia: la etapa de análisis.

Existen también otros elementos relacionados con la validez interna durante la aplicación del método de criterio de expertos, donde fueron disminuidas algunas posibles fuentes de invalidación. Siguiendo a Hernández, Fernández, y Baptista (2014, p. 137), algunas amenazas tales como la compensación en grupos de control, la maduración, la instrumentación, y la administración de varias pruebas, no tuvieron lugar, conforme a la metodología implementada. El anonimato de los expertos favoreció la no difusión de tratamientos, o sea, que los expertos se hubiesen comunicado entre sí. La selección del panel mostró una amplia experiencia en la realización de investigaciones experimentales en educación matemática, con indicadores de selección aproximadamente similares. Tampoco se observaron respuestas extremas ni desbalanceadas, lo cual disminuye la posible regresión. Asimismo, la conducta del experimentador fue objetiva, directa y diáfana, con apego al respeto y a la ética científica en su comunicación con el panel.

De forma general, las condiciones del entorno para cada experto fueron similares, en el sentido de emitir sus consideraciones con tiempo suficiente desde su propia casa, así que existió cierta estabilidad en el ambiente experimental. Sin embargo, dos aspectos pudieron atentar contra la validez interna. En primer lugar, el periodo de confinamiento a causa de la pandemia de la COVID–19 constituyó un evento que pudo alterar de forma no controlada las posibilidades de que cada experto desplegara un análisis suficientemente profundo y minucioso (amenaza de historia). En segundo lugar, se detectaron problemas de mortalidad, ya que algunos expertos abandonaron el experimento, incluso después de una segunda solicitud de respuesta. Este hecho ha sido reportado en numerosos estudios y constituye una de las principales amenazas durante el empleo del método de criterio de expertos (Cruz y Rúa, 2018).

Los resultados obtenidos permiten jerarquizar los instrumentos y su totalidad. En primer lugar, puede notarse un desbalance marcado del coeficiente de proximidad hacia la entrevista semiestructurada. Esto indica que los expertos consideran dicho instrumento más efectivo que los restantes $0.7489 > 0.2769 > 0.2697$. Tal singularidad puede estar dada por la importancia del intercambio directo entre el investigador y el sujeto investigado. En una entrevista individual es posible aclarar cualquier aspecto de forma inmediata, y también se eliminan ciertos sesgos, tales como el temor a la intervención en grupo, la presencia de individuos dominantes, entre otros elementos presentes en escenarios colectivos (Cruz, 2009).

Los instrumentos para este estudio se diseñaron como sistema integrador, en lo fundamental, el cuestionario de 10 tareas que fue enviado a los participantes del estudio piloto, que tenían por objetivos estimular los diferentes significados asociados con el concepto de pendiente. Las Tareas 1, 2 y 7 favorecen, esencialmente, los significados geométricos y algebraicos. Las Tareas 3, 6 y 10 permitieron explorar los significados geométricos y las Tareas 4, 5, 8 y 9 los significados analíticos. Cabe destacar que tareas similares a las Tareas 1, 3 y 6, han sido utilizadas con objetivos similares en las siguientes investigaciones (Stump, 1999; Zaslavsky, et al., 2002; Thompson, 2016).

Al observar que el valor máximo de CC_i se alcanza en la totalidad de los instrumentos, puede afirmarse que el conjunto formado por los tres instrumentos, en cierta medida, supera las deficiencias de cada uno por separado. Además, la sugerencia de añadir un cuarto dispositivo relacionado con los argumentos del alumno acerca del concepto de pendiente, permite un perfeccionamiento del instrumental diagnóstico antes de emprender nuevas acciones de investigación. Una solución posible podría ser la elaboración de una guía de observación de clases, la adaptación de los propios instrumentos diseñados para el caso de los alumnos, el diseño de una guía para la revisión de exámenes relacionados con el concepto de pendiente, entre otras variantes.

La observación anterior favorece un análisis más integral del fenómeno, pues va más allá de los esquemas de pensamiento y los significados que se transmiten o imaginan transmitir, enfatizando la exploración empírica de lo que realmente se transmite. Finalmente, la sugerencia de incorporar recursos audio–visuales, así como la mejora continua de cada elemento de los instrumentos, son base para emprender un camino de validación futura, lo cual requeriría de otros estudios apoyados en muestras más representativas.

V.2 Grado en que se manifiestan los significados del concepto de pendiente en profesores universitarios

En este epígrafe se explora el grado en que se manifiestan los significados analítico, algebraico, geométrico y contextual del concepto de pendiente en profesores universitarios de matemáticas. Para este estudio se aplicó una encuesta a 15 expertos de diferentes nacionalidades con la finalidad de valorar los significados presentes en las soluciones planteadas por docentes a un sistema de ejercicios asociados al concepto de pendiente. En la misma dirección, se realizó un análisis estadístico de las evidencias empíricas obtenidas. El significado geométrico se presentó con mayor frecuencia, en lo fundamental, a través de las representaciones: razón geométrica, tangente del ángulo de inclinación, razón entre las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo formado por la recta, el eje x y la paralela al eje y.

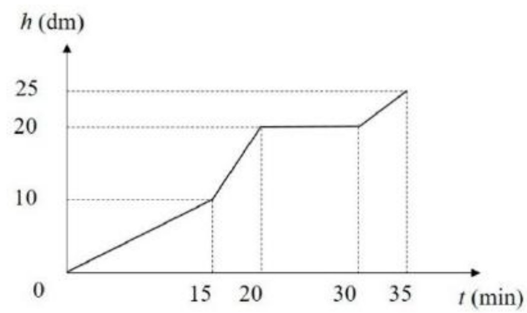
Metodología. Seguidamente se describe la metodología desarrollada, en un estudio empírico, concebido para explorar el grado en que se manifiestan los significados analítico, algebraico, geométrico y contextual, en profesores de matemáticas. Esta descripción contempla cinco apartados: diseño, instrumentos, participantes, variables y análisis de las evidencias empíricas.

Diseño e instrumentos. El estudio se estructuró en dos etapas. La primera de ellas consistió en la aplicación de un cuestionario, contentivo de cuatro ejercicios relacionados con el concepto de pendiente a un grupo de profesores universitarios que imparten matemáticas. En la segunda, se presentan las soluciones de los profesores a un panel de expertos en el campo de la matemática educativa, con la finalidad de que evaluaran el grado en que se manifiesta cada tipo de significado en los ejercicios resueltos y también de modo general para cada resolutor.

Los instrumentos implementados fueron tres. En primer lugar, se utilizó un temario contentivo de cuatro ejercicios E1, E2, E3, y E4, los cuales están relacionados con el concepto de pendiente, de forma implícita como se muestra en la Figura 14.

EJERCICIO No. 1

E1. La gráfica muestra la altura *h* que va alcanzando el agua durante el proceso de llenado de un tanque, a partir del momento en que se abre una llave y durante ciertos intervalos de tiempo *t* hasta que el tanque se llena totalmente.



f. ¿Se detuvo el proceso de llenado en algún momento? ¿Durante qué tiempo?
g. ¿Con qué rapidez se llena el tanque durante los primeros 15 minutos?
h. Seleccione la respuesta correcta y fundamente:

"A los 18 minutos el agua tenía una altura de (A) __19 dm, (B) __16 dm, (C) __15 dm, (E) __18 dm".

i. ¿En cuál tramo la altura del agua cambió más rápidamente? Justifique.
j. Determine la ecuación de la función que modela el ascenso de la altura del agua dentro del tanque, durante el tiempo que duró el proceso.

EJERCICIO No. 2

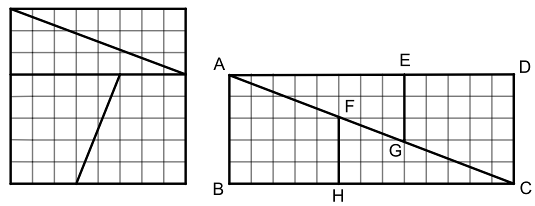
E2. Dos corredores comienzan una carrera al mismo tiempo y terminan en empate. Pruebe

---

que en algún momento de la carrera ambos corredores alcanzan la misma velocidad.

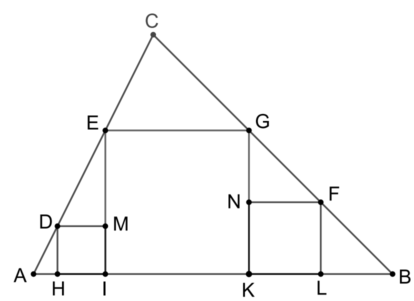
EJERCICIO No. 3

E3. Pedro va a un almacén y le dice al dependiente que viene a comprar 65 m^2 de alfombra para el piso de su casa que tiene exactamente esa área. El dependiente le responde que le queda solo un rollo de 500 m^2 y de él ya tiene vendidos 436 m^2, por lo que solo puede venderle los 64 m^2 restantes. Después de pensarlo un poco Pedro le dice al dependiente que traerá, en una cartulina, un cuadrado de 8 m de lado (que tiene 64 m^2), lo va a dividir en 4 partes iguales 2 a 2 como se muestra en la figura de la izquierda y con ellas va a formar el rectángulo que se muestra en la figura de la derecha, que sería la parte de la alfombra que se llevaría. De ser usted el dependiente ¿Estaría de acuerdo con la proposición de Pedro? Explique su respuesta.



EJERCICIO No. 4

E4. Considere el triángulo *ABC*. Los puntos *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, están sobre los lados de dicho triángulo (véase la figura). Los cuadriláteros *HIMD*, *IKGE* y *KLFN* son cuadrados cuyas áreas miden $4u^2$, $36u^2$, $9u^2$, respectivamente. Determine el área del triángulo *ABC*.



a. Resuelva el problema por otra vía y diga si existe alguna relación o algún concepto relacionante entre ambos caminos de solución.

Figura 14: Ejercicios propuestos en el cuestionario

Como dispositivo de selección del panel de expertos, se solicitó el diligenciado de un cuestionario desarrollado por Cruz y Martínez (2012), el cual permite el cálculo de un índice de competencia experta k, resultante de la semisuma de sendos parámetros: un coeficiente de conocimientos acerca del tema investigado k_c, y un coeficiente k_a relacionado con el grado de incidencia de siete fuentes de argumentación, predefinidas bajo una escala tipo Likert.

El valor de k_c depende de forma directa de la autoevaluación del candidato, en una escala ordinal de 11 categorías: 0, 1,…, 10, donde el valor seleccionado se divide por 10. El valor nulo expresa ausencia total de conocimiento acerca del tema investigado, mientras que el valor 10 evidencia un conocimiento pleno. El cálculo de k_a depende de la suma de pesos asignados para diferentes grados de influencia de cada fuente de argumentación, como se ilustra en la Tabla 7.

Tabla 7. Escala Likert para el cálculo del coeficiente de argumentación k_a

Fuentes de argumentación	Grado de influencia de las fuentes en sus criterios*					
	MA	*A*	*M*	*B*	*MB*	*N*
Capacidad para el análisis didáctico de los significados	0.18	0.14	0.11	0.07	0.04	0.00
Comprensión del problema investigativo	0.12	0.10	0.07	0.05	0.02	0.00
Amplitud de enfoques epistemológicos	0.12	0.10	0.07	0.05	0.02	0.00
Conocimiento del estado actual del problema investigado	0.13	0.10	0.08	0.05	0.03	0.00
Nivel de motivación por resolver el problema científico	0.14	0.12	0.09	0.06	0.03	0.00
Experiencia en el desarrollo de investigaciones científicas en matemática educativa	0.15	0.12	0.09	0.06	0.03	0.00

Experiencia de orden empírico en matemática educativa (práctica profesional)	0.16	0.13	0.10	0.07	0.03	0.00

(*) Valores de escala: *MA* = muy alto, *A* = alto, *M* = medio, *B* = bajo, *MB* = muy bajo, *N* = nulo

Fuente: adaptado de Cruz y Martínez (2012, p. 174)

En virtud de que $0 \leq k_c \leq 1$ y $0 \leq k_a \leq 1$, se obtiene que el coeficiente de competencia experta $k = ½(k_c + k_a) \in [0, 1]$, donde el punto de corte mínimo se fija en el valor $k = 0.75$ para la selección definitiva de los integrantes del panel.

El tercer instrumento consistió en una compilación digitalizada de todas las soluciones a los cuatro problemas descritos en la Figura 1. De cada profesor se presentaron sus cuatro soluciones, provistas respectivamente de rejillas formadas por cuatro casillas. En la rejilla, cada experto evaluó el grado de presencia de los cuatro tipos de significados, ya sea algebraico (Al), analítico (An), geométrico (Ge), o contextual (Co), sobre el concepto de pendiente. Para consignar los criterios se estableció la escala ordinal 0, 1,…, 5, donde el valor nulo indica ausencia total del significado correspondiente, y 5 expresa una presencia absoluta. Los valores no son excluyentes, de modo que en un mismo problema es posible identificar diferentes significados, con niveles independientes de manifestación. Además de la evaluación correspondiente a cada problema, también se solicitó el diligenciado de una rejilla adicional, a fin de que los expertos también emitieran una evaluación general del grado en que se expresan los significados en cada resolutor.

Participantes y variables. En la primera etapa se seleccionó una muestra de 17 profesores de la Facultad de Matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), todos con experiencia de al menos cinco años en la educación superior. La comunicación fluyó de manera diáfana, con el compromiso expreso de que el uso de los resultados se mantendría bajo estricta confidencialidad. Los profesores contaron con tres días naturales para el diligenciado del instrumento, cuyas respuestas se recopilaron por la vía del correo electrónico o de forma directa. Todos recibieron una carta de agradecimiento por su amable colaboración.

Para la preselección del panel, en la segunda etapa, se exploraron tres redes sociales científicas: *Academia*, *LinkedIn*, y *ResearchGate*, a fin de conformar una preselección de 30 posibles expertos, por intermedio de la búsqueda automatizada de las palabras claves “matemática educativa” y “educación matemática”. La preselección priorizó el contexto latinoamericano, así como la representatividad de países del área. En la primera comunicación, los posibles expertos recibieron una carta de invitación para participar en el estudio, con una explicación sintética de los objetivos, del problema de investigación, así como un breve resumen de la tipología de significados del concepto de pendiente. También recibieron copia del cuestionario autoevaluativo, para el cálculo del índice de competencia experta, y la solicitud de su diligenciado en el término de una semana.

De forma explícita se declaró el compromiso pleno de confidencialidad, ética y transparencia en el manejo de la información. En la segunda comunicación, se informó individual y gentilmente el resultado de la inclusión o no el panel participante. Seguidamente, cada miembro del panel recibió la compilación condensada del conjunto de $13 \times 4 = 52$ soluciones, con sus rejillas evaluativas correspondientes. Los expertos seleccionados contaron con un mes de tiempo disponible para enviar, por vía del correo electrónico, los resultados de sus evaluaciones correspondientes.

El significado que los profesores tienen acerca del concepto de pendiente constituye la variable fundamental de la presente investigación. Su análisis se erige con base en una tipología formada por cuatro significados fundamentales: analítico, algebraico, geométrico, y contextual. Por tanto, en un individuo puede manifestarse un significado marcadamente analítico, en el sentido de poner por delante métodos propios del cálculo diferencial en problemas que tienen como centro el concepto de pendiente. Asimismo, un individuo puede mostrar la formación del significado en sentido plural, de modo que es la propia naturaleza del problema a resolver la que favorece el despliegue de varios tipos de significados.

Las variables independientes están comprendidas por los profesores y los expertos, ambos conjuntos fueron seleccionados en el marco del presente estudio. Diferencias entre las formas de percibir y de realizar el significado, son aspectos de interés para la presente investigación. Por su parte, la variable dependiente (el significado del concepto de pendiente) será analizada con ayuda de los valores que aporta la rejilla evaluativa: en cada ejercicio y en la valoración general.

Análisis de las evidencias empíricas. El análisis de los datos se desarrolla a partir de los datos que provee el criterio valorativo del panel de expertos. Cada rejilla aporta la evaluación del nivel en que se manifiesta el significado, conforme a la escala establecida en seis categorías (0–5), y para cada tipo de significado posible (An, Al, Ge, y Co). Esta evaluación se realiza de manera local, centrada en cada ejercicio (E1, E2, E3, y E4), y también de manera global, conforme a la valoración general de las cuatro respuestas de cada profesor (P01, P02,…, P17).

Con el objetivo de determinar la consistencia interna del instrumento, la matriz formada por el conjunto de datos se examina con ayuda del coeficiente Alfa de Cronbach. Seguidamente, se despliega un análisis descriptivo, basado en los valores medios de las evaluaciones. También se utilizan métodos de clasificación jerárquica para develar posibles conglomerados respecto a las variables nominales. En vista de que las rejillas describen evaluaciones particulares (relativas a cada ejercicio) y generales (basadas en el conjunto de los cuatro ejercicios), también se exploran posibles modelos de regresión lineal múltiple que describan relaciones objetivas subyacentes.

Todo el análisis estadístico se implementa con ayuda del paquete SPSS (IBM Corp., 2020). El análisis de las evidencias empíricas culmina con el establecimiento de una tipología de problemas, inherentes al despliegue y predominio de significados en las soluciones al conjunto de ejercicios.

V. 2.1 Resultados y discusión

Los 17 profesores seleccionados enviaron sus respuestas por los canales de comunicación establecidos. Cuatro de ellos requirieron de un tiempo adicional y el proceso de recopilación de información se extendió por una semana. Después de una revisión preliminar se observó que las respuestas del docente P14 fueron algo superficiales, mientras que los profesores P06, P11 y P15 dejaron ejercicios sin responder. Por este motivo, se eliminan sus ítems del presente estudio. Así, quedan definitivamente las soluciones de 13 profesores, las cuales conforman la compilación digitalizada provista de las rejillas evaluativas. A modo de ilustración, la Figura 15 refleja las respuestas de los docentes P01, P05, P13 y P17 a los ejercicios E1, E2, E3 y E4, respectivamente. En el caso de la solución P17–E4, aparece en la parte inferior derecha un ejemplo de rejilla para su evaluación correspondiente.

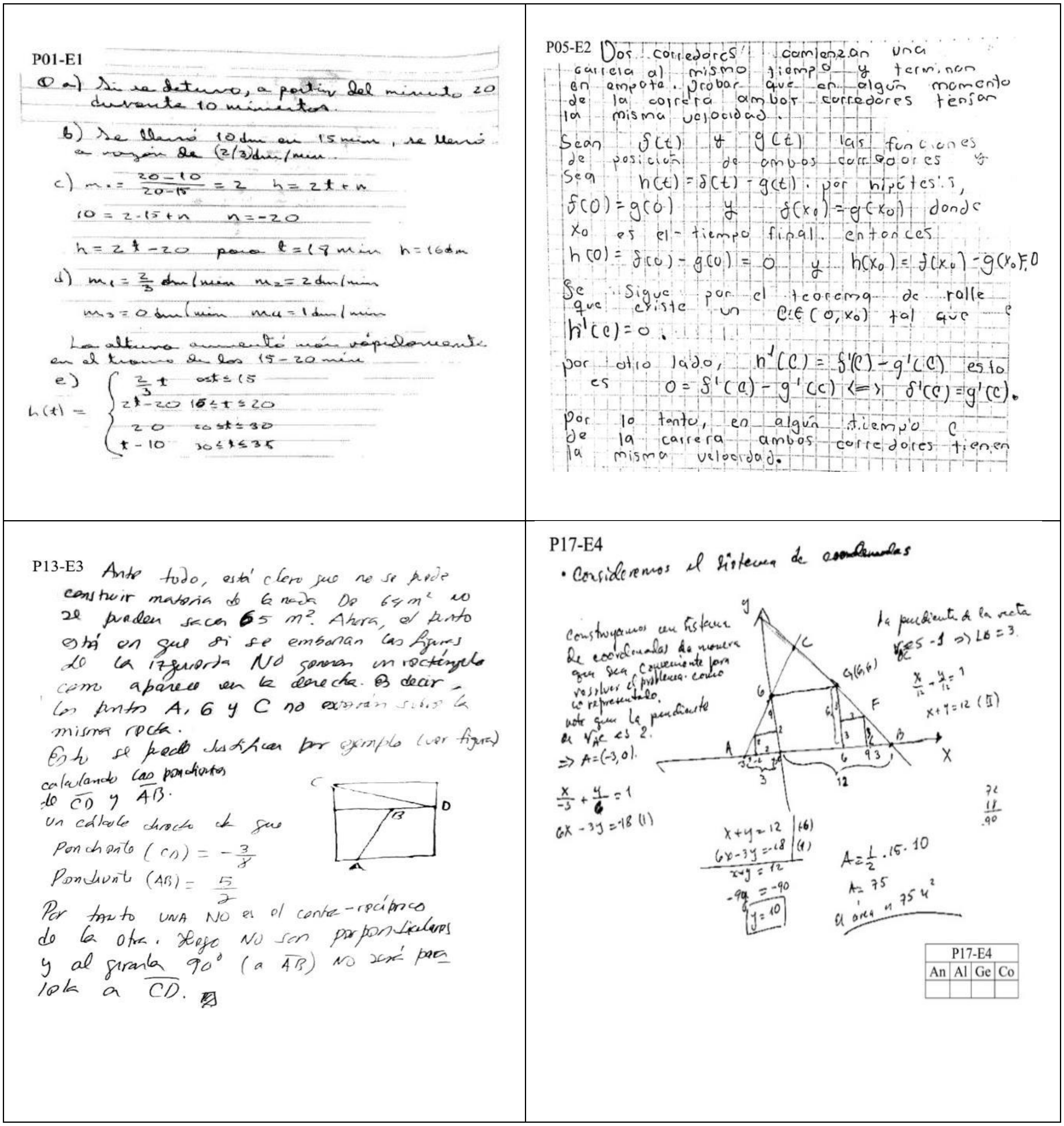


Figura 15: respuestas de los docentes P01, P05, P13 y P17 a los ejercicios E1, E2, E3 y E4

Fuente: Tomada de la respuesta de los profesores

En busca de economía del tiempo, de forma simultánea se envía la primera comunicación a los posibles expertos. Transcurrida una semana, se obtiene respuesta de 27 de ellos (54.0%). Inicialmente se excluyen dos, a causa de no presentar el formulario para la determinación del índice de competencia experta *k*. El cálculo de este coeficiente conlleva a conformar un panel definitivo de 21 expertos, pues en cuatro casos se obtuvieron valores excluyentes de $k < 0.75$. A continuación, se envía al panel la compilación digitalizada de respuestas, con sus rejillas evaluativas correspondientes.

Al cabo de un mes, se obtiene respuesta de 12 integrantes del panel. Se solicita amablemente la respuesta de los restantes expertos y transcurridas otras dos semanas, se logra recopilar las evaluaciones emitidas por 15 expertos. En dos casos fue necesario solicitar correcciones formales, a causa de un llenado inadecuado de las rejillas evaluativas. En este caso de los 15 expertos que respondieron poseen doctorados en el campo de la matemática educativa, son investigadores activos con un *RG* (*ResearchGate Score*) promedio de 8.3 y un índice de *H* (índice de Hirsch en *Google Scholar*) de 10.1. Los países de procedencia son México (5), Cuba (3), Colombia (2), Argentina (2), Estados Unidos (1) y España (2).

Análisis estadístico de las evidencias empíricas. El diligenciado de las evaluaciones produce una matriz de $15 \times 13 = 195$ filas, correspondientes a los 15 expertos y los 13 profesores seleccionados, así como 22 columnas compuestas por dos variables nominales (Exp = expertos y Prof = profesores), y 20 variables ordinales (cada una de los cuatro tipos de significado, para los cuatro ejercicios y en la valoración general). El coeficiente Alpha de Cronbach produce un valor poco fiable ($\alpha = 0.43$), conforme a la escala sugerida por Cohen, Manion, y Morrison (2007). Incluso, si se elimina del estudio cualquiera de sus variables, el valor máximo de Alpha no supera a 0.5. Esta limitación en la consistencia interna obedece, principalmente, al número reducido de los valores de escala, donde percepciones similares de los expertos pueden producir la misma respuesta, incluso existiendo diferencias. No obstante, como aspecto positivo pudo comprobarse que ninguna variable dependiente tuvo varianza nula.

Tomando en consideración las evaluaciones desarrolladas por todo el panel de expertos, la Tabla 8 ilustra el resultado descriptivo fundamental, para cada uno de los 13 profesores seleccionados.

Tabla 8. Valores medios en las evaluaciones del panel de expertos

Prof.	E1	E2	E3	E4	General**

	Al	An	Ge	Co	Al	An	Ge	Co	Al	An	Ge	Co	Al	An	Ge	Co	Al	An	Ge	Co
P01	3.47	3.27	1.20*	0.87	0.27	4.67	0.20	0.20	2.93	1.00	3.20	0.27	3.87	0.73	2.53	0.40	3.47	1.53	1.40	0.27
P02	2.53	3.53*	0.60	0.73	2.33	4.60	0.33	0.60	2.53	1.80	4.73	0.27	4.87	0.33	4.53	0.87	3.67	2.47	3.07	1.00
P03	4.13	2.33	2.80	0.20	1.60	4.20	0.20	0.73	0.73	0.93*	0.93*	0.33	1.80*	0.53	0.73	0.60	1.87*	2.40	2.13*	0.47
P04	4.40	3.07	1.53	0.27	2.27	4.80	2.67	0.13	3.53	1.33	4.20	2.87	2.80	0.20	2.53	0.27	3.73	2.13	2.47	0.53
P05	4.20	4.07	3.20	0.33	0.73	4.73	0.60*	0.33	1.33	0.93	4.67	0.27	3.73	0.73	1.80	0.33	3.20	2.87	2.67	0.33
P07	4.40	1.67	2.07*	0.40	2.07	1.13*	2.33	0.47	0.80	0.53	3.13	2.53	0.13	0.40	1.33	2.80	3.40	0.53	2.53	1.80
P08	4.27	1.40	0.27	0.20	0.67	3.00*	1.13	0.13	0.07	0.27	1.40	1.40	3.53	2.80*	2.40	0.27	3.67	2.13	0.60	0.67
P09	3.93	2.67	0.60	0.27	1.27*	4.73	0.13	0.60	1.87	0.13	3.53	2.00	1.33	3.00	1.67*	2.20	3.80	4.13	1.53	1.93
P10	4.60	2.40	0.33	0.73	2.13	3.87	1.20	0.93	2.00	0.60	4.20	2.40	4.47	0.47	4.60	0.20	4.47	2.40	3.27	1.60
P12	4.00	1.40	0.40	0.60	0.33	3.07	1.07	0.13	0.80	0.80	0.87	2.60	1.80	2.27	3.73	0.13	1.27	2.20	2.00	1.60
P13	3.00*	1.47	4.53	1.33	0.33	0.27	3.20	1.33	0.13	1.33	2.27	0.93	1.00	1.40*	3.67	1.80	2.00	0.73	3.13	1.53
P16	3.13	0.93*	0.40	0.47	0.27	3.67	3.33	1.20	1.73	0.20	0.47	2.67	3.00	0.07	1.87	0.27	2.27	1.67	1.20	1.47
P17	2.87	0.93*	3.60	0.73	2.00	3.53	0.40	0.33	2.87	1.07	3.73	1.33	3.33	4.13	2.67	0.47	2.73	2.60	2.53	0.20
Total	3.76	2.24	1.66	0.55	1.25	3.56	1.29	0.55	1.66	0.75	2.77	1.47	2.74	1.31	2.62	0.82	3.04	2.14	2.19	1.03

(*) Valores medios con desviación típica mayor o igual que 1 (20% o más del rango de la escala).

(**) Se refiere a la evaluación de las respuestas en su conjunto (E1, E2, E3 y E4 a la vez).

Fuente: Elaboración propia

La amplia mayoría de los valores medios experimenta una desviación típica inferior a la unidad. Este hecho aporta evidencia de que la percepción de los expertos fue bastante similar en referencia a cada profesor en el plano individual, para cada ejercicio, y también en su evaluación general. Sin embargo, son visibles ciertas diferencias entre los profesores, tanto en ejercicios puntuales como en su proceder general ante el conjunto de los cuatro ejercicios.

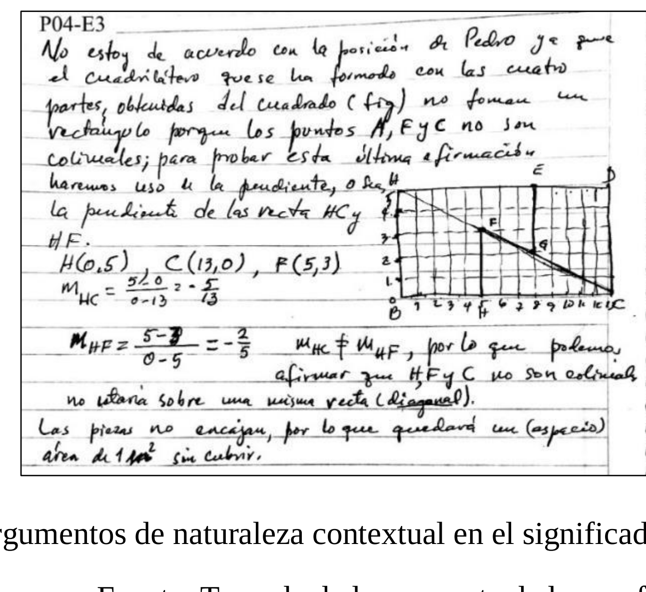
Los valores sombreados corresponden a las respuestas ilustradas en la Figura 15. En el caso de P01–E1, los expertos aprecian un predominio del significado algebraico (3.47) y del analítico (3.27), lo cual puede estar dado por la utilización del concepto de función lineal y el cálculo de la pendiente como razón entre diferencias. El caso de P05–E2, se aprecia un predominio muy marcado del significado analítico (4.73), mediado por el empleo del concepto de derivada. En P13–E3 se observa una ligera manifestación del significado geométrico (2.27), probablemente motivado por la argumentación basada en el cálculo de razones entre las longitudes de catetos e hipotenusas, la rotación de figuras y el concepto de perpendicularidad. Finalmente, en P17–E4 predomina el significado analítico (4.13) y un poco menos el algebraico (3.33). Se trata de una solución basada en el cálculo de la pendiente como coeficiente en una ecuación lineal, aspecto que implicó la introducción de un sistema de coordenadas cartesianas.

En la última fila, referida a los promedios generales, se aprecia el predominio del significado algebraico en los ejercicios E1 y E4 (3.76 y 2.74, respectivamente). En el ejercicio E2 predomina el significado analítico (3.56), motivado por la estrecha conexión entre el concepto físico de velocidad instantánea y el concepto de derivada, así como la utilidad que reviste el teorema de Rolle. Por su parte, en el ejercicio E3 predomina el significado geométrico (2.77), lo cual también se expresa en un segundo nivel jerárquico para el ejercicio E4 (2.62).

A diferencia de los dos primeros ejercicios, el propio enunciado de estos problemas pone por delante un objeto geométrico, lo cual puede condicionar el tipo de solución. No obstante, como pudo verse en la solución de P17–E4, este supuesto condicionamiento no es determinante (véase la Figura 14). Las columnas correspondientes a la percepción general revelan que, a excepción de los profesores P03, P12 y P16, en el resto de los casos predomina el significado algebraico. En los promedios correspondientes a la valoración general, para el total de profesores, se reafirma el predominio del significado algebraico: $Al = 3.04 > Ge = 2.19 > An = 2.14 > Co = 1.03$.

Llama la atención el hecho de que el significado de tipo contextual ocupa los valores más bajos, tanto en las respuestas a cada ejercicio, como en sentido general. Ello puede obedecer a la naturaleza relativamente elaborada y académica de los ejercicios propuestos, lo cual impone ciertos límites al proceso de modelación matemática. Sin embargo, en algunos casos los profesores utilizaron el concepto de pendiente no como un elemento a calcular en primera instancia, sino como una herramienta argumentativa para la solución del problema. Un ejemplo puede verse en la solución del profesor P04 al tercer problema, relacionado con la supuesta paradoja en el corte de una alfombra rectangular. La Tabla 8 refleja que los expertos evalúan P04–E3 con los valores medios *Al* = 3.53, *An* = 1.33, *Ge* = 4.20, y *Co* = 2.87. Este último valor es, precisamente, el máximo alcanzado para el significado de tipo contextual, en todo el universo de respuestas.

La Figura 16 muestra la solución de P04–E3. Si bien predomina el cálculo de la pendiente como coeficiente de una ecuación lineal (significado predominantemente algebraico), el resolutor se apoya en la no colinealidad entre los puntos *A*, *F* y *G*. Con la finalidad de sostener su criterio, el profesor expresa que: "…para probar esta última afirmación haremos uso de la pendiente…". Por tanto, el resolutor pone por delante el concepto de pendiente, como noción matemática que sirve de argumento esencial. En fin, el cálculo del valor de la pendiente constituye una realización de cierto proceso de modelación matemática. Ello justifica que los expertos hayan ponderado el significado contextual, en sus respectivas evaluaciones.


P04-E3

No estoy de acuerdo con la posición de Pedro ya que el cuadrilátero que se ha formado con las cuatro partes, obtenidas del cuadrado (fig) no forman un rectángulo porque los puntos A, F y C no son colineales; para probar esta última afirmación haremos uso de la pendiente, o sea, la pendiente de las recta HC y HF.

H(0,5), C(13,0), F(5,3)

$m_{HC} = \frac{5-0}{0-13} = -\frac{5}{13}$

$m_{HF} = \frac{5-3}{0-5} = -\frac{2}{5}$ $m_{HC} \neq m_{HF}$, por lo que podemos afirmar que H, F y C no son colineales no estarían sobre una misma recta (diagonal).

Las piezas no encajan, por lo que quedará un (espacio) área de 1 m² sin cubrir.

Figura 16: Argumentos de naturaleza contextual en el significado del concepto de pendiente

Fuente: Tomada de la respuesta de los profesores

En el presente estudio, la clasificación de datos multivariados puede enfocarse desde formas diversas. Si se toma en consideración el conjunto de expertos, las variables dependientes para los 13 profesores producen un dendograma en forma de árbol de dos ramas. Una de las ramas está formada por un único individuo, con un nivel de desemejanza inferior al 15%. El bajo nivel de disimilitud permite afirmar que la amplia mayoría de los expertos tuvo una percepción similar en el universo de evaluaciones. Particularmente, el análisis puntual del experto con percepción relativamente atípica, revela que adoptó una postura más severa en sus evaluaciones ante situaciones con limitada argumentación. Por otro lado, el análisis de las variables dependientes, centradas en cada ejercicio particular (se excluye la evaluación general), aporta un hecho interesante relacionado con su clasificación jerárquica.

El dendograma de la Figura 4 refleja la existencia de un árbol formado por dos conglomerados, con una desemejanza cercana al 25% (método de agrupación basado en enlaces entre grupos, y medida basada en el cuadrado de la distancia euclidiana).

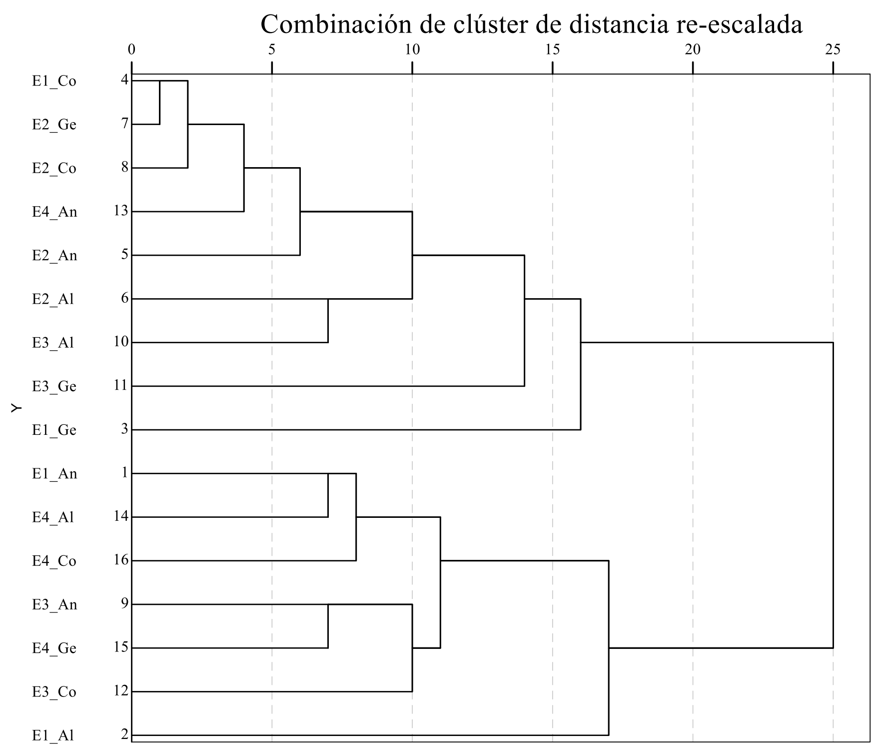


Figura 17: Dendograma que ilustra la existencia de sendos conglomerados perceptivos

Fuente: Elaboración propia

Puede observarse un grupo compuesto por 9 variables y otro por 7, de las 16 examinadas (16 = 4 ejercicios × 4 tipos de significado). Independientemente de las diferencias obvias que subyacen entre los cuatro ejercicios, relacionadas con su formulación, los objetos matemáticos que involucran, el nivel de complejidad, entre otros aspectos matemáticos, existe un elemento que llama la atención. En efecto, una mirada centrada en el tipo de significado revela cierto desbalance respecto al significado geométrico. Si bien los tipos restantes de significado están distribuidos de un modo más uniforme, el significado geométrico es ampliamente dominante en el clúster superior de la Figura 4, incluso en dos subgrupos de mayor jerarquía.

Nótese que ocurre así en el clúster inferior, donde predomina lo algebraico y analítico. Por tanto, las evidencias sugieren una especie de dicotomía en la forma de clasificar los significados: una centrada en lo geométrico, y otra centrada en lo algebraico y lo analítico, fundamentalmente. El significado contextual, se observa con una distribución más balanceada en ambos conglomerados del dendograma, incluso con niveles de disimilitud inferiores al 10%.

La evaluación general del grado en que se manifiesta cada tipo de significado, en mayor o menor medida, puede estar condicionada por las evaluaciones específicas que el experto realizó en los respectivos ejercicios. Si se consideran como observaciones las 15×13 = 195 evaluaciones realizadas por los 15 expertos a los 13 profesores, entonces es posible explorar ciertas regresiones lineales múltiples. Esta idea se concreta al determinar en qué medida la variable dependiente Gen_{Sig} depende del conjunto de variables independientes Ei_{Sig}, donde *Gen* = evaluación general, *Ei* = ejercicio *i*, y el subíndice $Sig \in \{Al, An, Ge, Co\}$ indica el tipo de significado. El procesamiento estadístico realizado se resume en la Tabla 9.

Tabla 9 – Resultados del análisis de regresión lineal múltiple

Variable dependiente	Varianza explicada		Constante		$E1_{Sig}$		$E2_{Sig}$		$E3_{Sig}$		$E4_{Sig}$	
	R^2	F	α	t	β_1	t	β_2	t	β_3	t	β_4	t
Gen_{Al}	0.07	3.65^{**}	1.90	4.44^{**}	–0.20	-2.19^{*}	–0.06	–0.74	0.09	1.20	0.21	2.19^{*}
Gen_{An}	0.38	29.04^{**}	2.69	12.31^{**}	0.29	3.62^{**}	0.09	0.96	0.24	3.46^{**}	–0.68	-7.26^{**}

Gen_{Ge}	0.06	2.99*	2.19	6.31**	–0.13	–2.18*	0.26	1.82	0.04	0.67	0.15	1.71
Gen_{Co}	0.23	14.12**	1.43	9.97**	–0.03	–0.35	–0.22	–3.31**	–0.18	–5.07**	0.12	2.56*

(*) $p < 0.05$, (**) $p < 0.01$ Fuente: Elaboración propia

Los coeficientes de determinación R^2 son relativamente bajos, e incluso el test de Durbin–Watson produce valores inferiores a $d_U = 1.79$ ($n = 195$, $k^* = 4$), lo cual afecta el requisito de no autocorrelación. En particular, el análisis de regresión tiene mejor bondad de ajuste para la evaluación general del significado analítico (Gen_{An}), con una proporción del 37.9% de la varianza total explicada. La prueba ANOVA correspondiente produce un estadístico $F = 29.04$, altamente significativo ($p < 0.01$, $gl = 4$). Además, cuatro de los cinco coeficientes lineales se calculan con niveles de significación aceptables para el estadígrafo t, donde el cálculo adicional del factor de inflación de la varianza produce valores $VIF < 2$; o sea, se satisface el requisito de no multicolinealidad.

En general, para todas las variables dependientes no se observan residuos con relaciones problemáticas respecto a las variables predictoras. Por ejemplo, retomando la variable Gen_{An}, el gráfico *P–P* de la Figura 18 muestra que los residuos se distribuyen aproximadamente de manera normal, aunque están ligeramente sesgados.

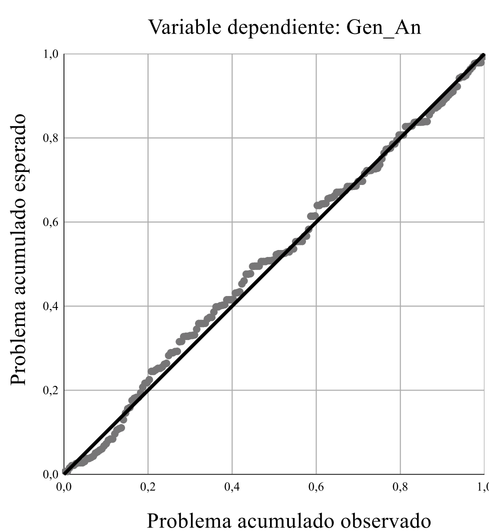


Figura 18: Gráfico *P–P* normal de regresión para residuos estandarizados

Con base en estas consideraciones, con muchas reservas las evidencias sugieren que las relaciones entre las evaluaciones generales y las particulares, subsisten bajo un modelo de regresión lineal. De los cuatro casos, el modelo menos controversial corresponde al significado analítico: $Gen_{An} = 2.69 + 0.29\times E1_{An} + 0.09\times E2_{An} + 0.24\times E3_{An} - 0.68\times E4_{An}$. Por ejemplo, en la Tabla 8 puede apreciarse que el profesor P09 obtuvo mayor evaluación promedio en el significado analítico ($An = 4.13$). Para este tipo de significado, el primer experto evaluó los ejercicios resueltos por P09 con los valores $E1_{An} = 5$, $E2_{An} = 1$, $E3_{An} = 3$, $E4_{An} = 3$, y el conjunto de los cuatro ejercicios con $Gen_{An} = 3$. Puede verse que esta evaluación se describe adecuadamente por el modelo anterior: $Gen_{An} = 2.69 + 0.29\times 5 + 0.09\times 1 + 0.24\times 3 - 0.68\times 3 = 2.91$.

El cuestionario utilizado en esta investigación ha sido concebido para explorar el grado en que se manifiestan los significados analítico, algebraico, geométrico, y contextual de la pendiente, en profesores universitarios de Matemática. El ejercicio E1 exige la modelación de una situación asociada, en lo fundamental, a significados geométricos y algebraicos de la pendiente. Por lo tanto, se espera que para su solución los profesores recurran a significados tales como: la razón entre el cateto vertical y el cateto horizontal del triángulo rectángulo, cuya hipotenusa yace sobre la recta; el desplazamiento vertical por cada unidad de desplazamiento horizontal; y la razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de dos puntos que pertenecen a la recta, esto es, una razón de la forma $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, con ecuación $y = mx + n$ con $m, n \in$ R.

Las respuestas a los Incisos (b)–(e), evidencian algunos de los significados que poseen los docentes sobre el concepto de pendiente, al establecer las relaciones necesarias entre dicho concepto y los conceptos que definen las exigencias del ejercicio. Por ejemplo, la rapidez de llenado en un intervalo de tiempo dado, el tramo en el que la altura del agua experimenta mayor variación, entre otras ideas. Además, las soluciones ponen de manifiesto el uso de representaciones geométricas, algebraicas y contextuales, asociadas con la pendiente. La Figura 19 ilustra la respuesta dada por el profesor P17 al Inciso (d).

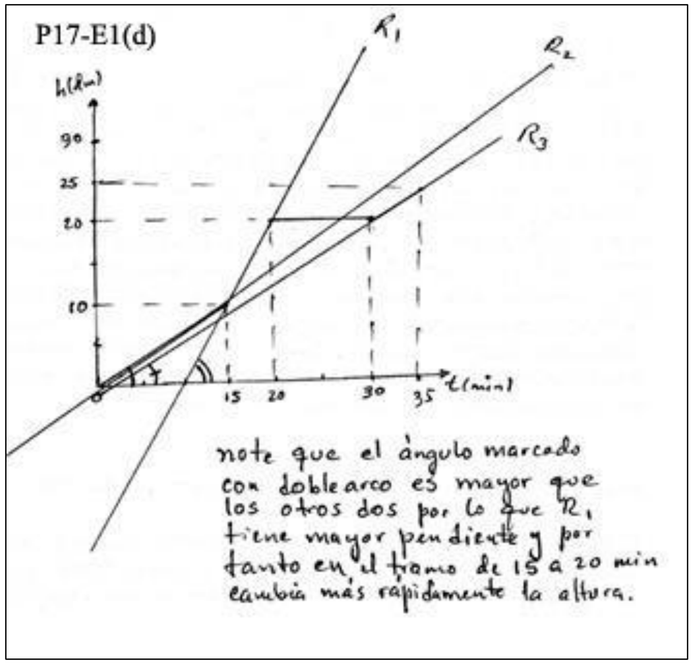


Figura 19: Una respuesta con significado predominantemente geométrico

Fuente: Tomada de la respuesta de los profesores

El resolutor despliega un razonamiento predominantemente geométrico, sobre la base del ángulo de inclinación. De aquí concluye que, como el ángulo es mayor, entonces la recta en cuestión tendrá mayor pendiente. Con ello, dicho profesor está asociando la idea de que: *a mayor ángulo de inclinación, mayor pendiente*. Esto último no es cierto en general. Un significado para la pendiente, de esta naturaleza, contribuiría a formar en los estudiantes un conocimiento limitado, que fuera de este contexto no es cierto. Además, por otro lado, no se analiza ni se precisan las condiciones bajo las cuales se cumple dicha relación.

Otra situación que se presenta en el ejercicio E1 está dada en el significado asignado a la pregunta: … *¿Durante qué tiempo?* El 56.3% de los docentes respondió a dicha pregunta, proponiendo un intervalo en lugar de una cantidad minutos. Esta forma de responder da cuenta del significado que se despliega para comprender la situación. Incluso, también se manifiesta cierta inconsistencia en el uso de variables, por ejemplo, al definir la función que modela el proceso como se muestra en la Figura 7, donde la función que depende de la variable x viene dada en términos de t.

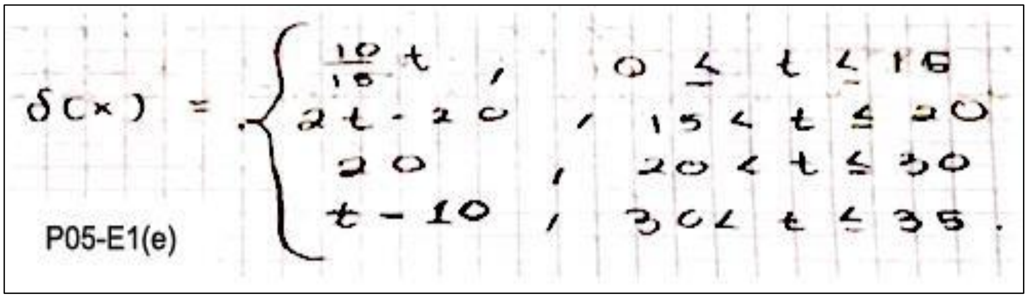
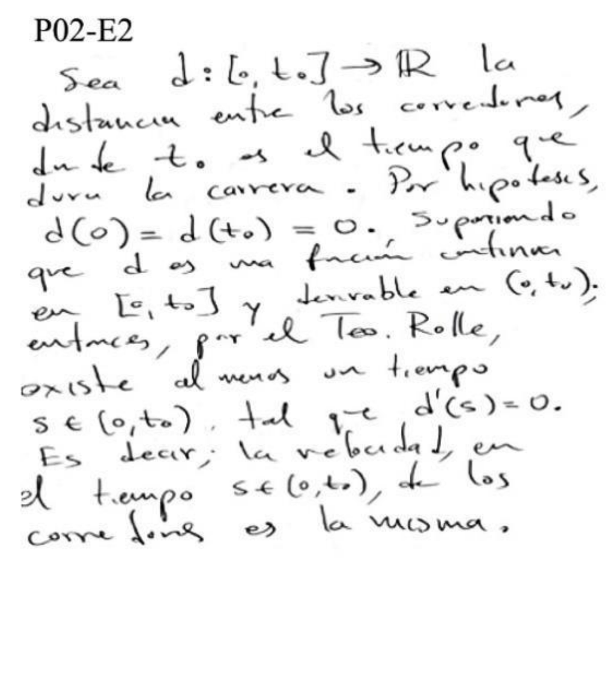


Figura 20: Una inconsistencia observada en el empleo de las variables

Fuente: Tomada de la respuesta de los profesores

El ejercicio E2 tiene como objetivo estimular que, a partir de las respuestas de los profesores, emerjan significados analíticos tales como la derivada de la función en un punto, la pendiente de la recta secante, y la pendiente de la tangente en un punto. También significados de naturaleza contextual y asociados a la pendiente, con base en las relaciones conceptuales de velocidad instantánea y tasa de cambio de la función del desplazamiento en un punto. Las respuestas producidas por los docentes al problema planteado se centran en dos direcciones principales: La primera está dirigida hacia significados predominantemente analíticos del concepto de pendiente.

Es notorio que el 62.7% de los profesores utiliza en sus respuestas propiedades básicas de las funciones, sin mostrar evidencia de algún tipo de representación geométrica y utilizando, esencialmente, los teoremas de Rolle y del valor medio. De este modo, garantizan la existencia de un punto en el que la tasa de cambio instantánea coincide con la tasa de cambio media de la función, en un intervalo dado. La segunda está dada en la combinación de los significados analíticos y geométricos, la cual fue seguida por el 29.4% de los profesores que participaron en el estudio. Durante el proceso de análisis y resolución, estos recurrieron al significado geométrico de la derivada, con lo cual establecieron conexión entre la pendiente de la secante y la tangente, auxiliados del teorema del valor medio. La Figura 21 ilustra ambos despliegues del significado predominantemente analítico (izquierda) y mixto analítico–geométrico (izquierda).



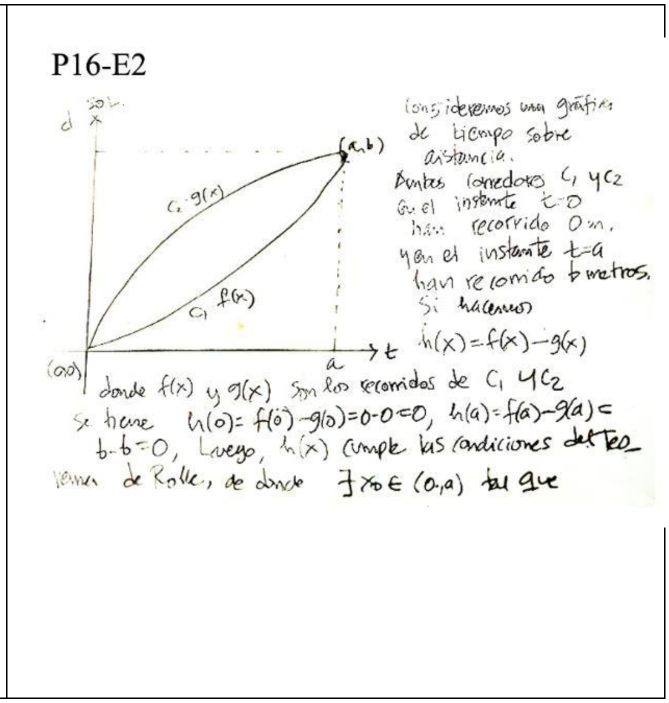


Figura 21: Predominio de diferentes significados en la solución de un ejercicio

Fuente: Tomada de la respuesta de los profesores

Otro aspecto a destacar, en las respuestas de los profesores al ejercicio E2, está dado en la confusión que se presenta entre el cambio de una magnitud en un instante y la tasa de cambio instantáneo de dicha magnitud. Es decir, matemáticamente se manifiesta confusión entre el valor de la variación de la función y la tasa de cambio de dicha función en un punto. Por ejemplo, el profesor P09 sugiere que: *"…al trazar las gráficas de distancia contra el tiempo de los corredores, estas van del punto* (0, 0) *hasta* (t_f, t_d)*, por continuidad debe haber un punto de intersección y es justo cuando tienen la misma velocidad"* (sic). Una situación similar se ha reportado en las investigaciones desarrolladas por Clement, (1985), McDermott et al. (1987), Stump (2001b), aspecto que denominan "confusión pendiente/altura".

El ejercicio E3 pretende explorar, en lo fundamental, significados geométrico y contextual sobre la pendiente que poseen los profesores, al darles la posibilidad de decidir si se puede o no formar un rectángulo con las piezas dadas. Básicamente, el problema se reduce a probar la alineación o no de tres puntos que supuestamente estarían en la diagonal de dicho rectángulo. Para dar respuesta al ejercicio planteado, los docentes proponen dos variantes siguientes: Probar la no alineación de los puntos utilizando la pendiente, como se puede ver en la Figura 15, respuesta P13–E3, y en la Figura

16, respuesta de P04–E3. Este último caso utiliza el supuesto de que la pendiente es constante, por lo que si se tienen tres puntos y se toman dos a dos y resulta que las pendientes formadas por cada pareja coinciden, lo cual implica colinealidad. Esta variante fue seguida por el 64.7% de los profesores.

La estrategia usada por P03, para establecer la no alineación de los puntos, prueba que los triángulos rectángulos *AIF*, *FHC* y *ABC*, no son semejantes. Para ello emplea la razón "…cateto vertical entre el cateto horizontal" (sic, ver Figura 22), como base para calcular la pendiente de una línea recta y verificar que estas razones no coinciden, lo cual significa que los tres puntos no son colineales. Al razonar por semejanza, con base en los catetos de triángulos rectángulos, subyace el significado geométrico de pendiente. Esta vía fue utilizada por el 23.5% de los profesores.

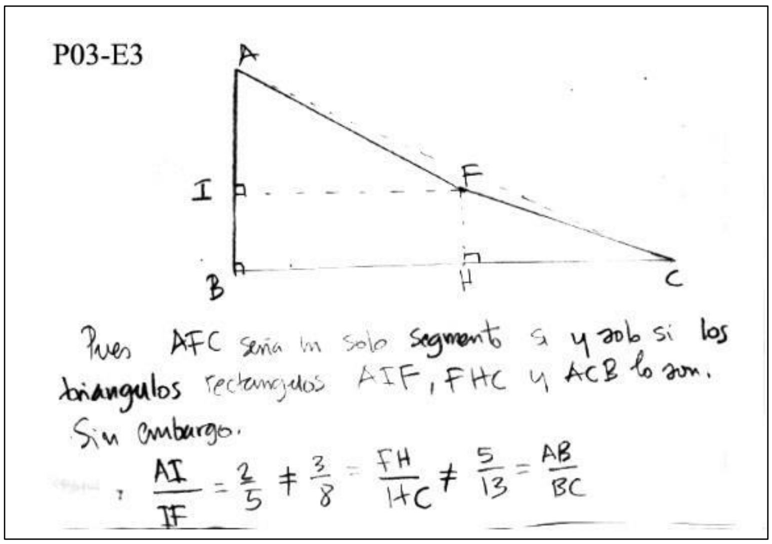


Figura 22: Significado geométrico basado en el concepto de semejanza

Fuente: Tomada de la respuesta de los profesores

El ejercicio E4 explora la capacidad para emplear el significado de pendiente en una situación de geométría sintética, donde no existen indicios declarados como rectas, ecuaciones de rectas, sistemas de coordenadas, entre otros conceptos. También estimula la búsqueda de otras vías de solución, así como el establecimiento de relaciones conceptuales entre las diferentes ideas. Como resultado, el 70.6% de los docentes desarrollaron esencialmente uno de los siguientes procederes: primero, la implementación de recursos de geometría analítica junto al despliegue directo y explícito del concepto de pendiente, el cual relacionan con significados geométricos o algebraicos; y segundo, el empleo de semejanzas de triángulos para luego señalar su relación con el concepto de pendiente, donde la noción de proporcionalidad es una especie de idea conectora. Esta última variante se manifiesta en el caso ilustrado en la Figura 23.

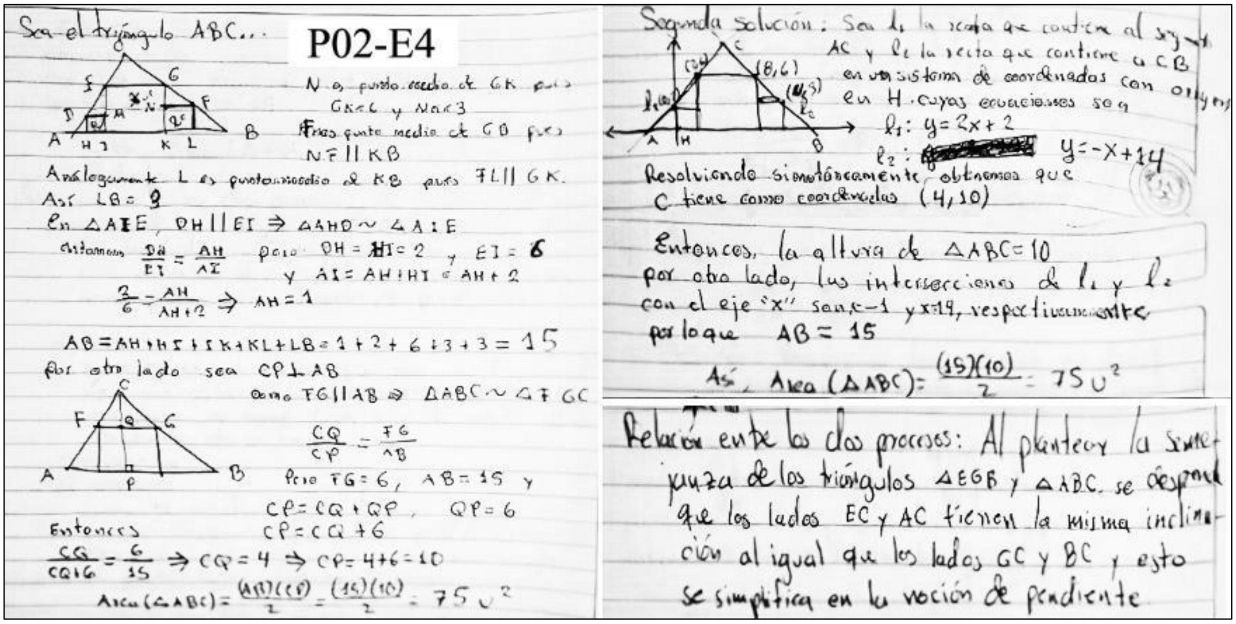


Figura 23: Relaciones entre significados desplegados en distintas soluciones

Fuente: Tomada de la respuesta de los profesores

Cabe señalar que tres profesores desarrollaron soluciones en las que combinan la semejanza de triángulos y elementos de trigonometría, y aunque utilizan la tangente del ángulo no llegan a relacionarla con la pendiente de una recta. Es importante significar el papel que juegan los significados que despliega el profesor, para comprender el problema y posteriormente elabrorar un plan o estrategia de solución. Precisamente, estos significados facilitan la contextualización del proceso resolutivo. Así, un problema puede emerger dentro de un contexto, pero no necesariamente tiene que resolverse con las herramientas de dicho contexto

V.3 Conclusiones del capítulo

En el primer estudio de las evidencias empíricas de aplicación, se ha podido observar la importancia de contar con un dispositivo instrumental que capte los significados para enseñanza que poseen los profesores sobre la pendiente. Las deficiencias en el proceso de elaboración de instrumentos de diagnóstico repercuten ulteriormente en las etapas de implementación y de análisis. De gran utilidad han sido el diseño y uso combinado de un cuestionario, una entrevista semiestructurada y una entrevista grupal, lo cual es perfectible ya que su objeto de análisis se enmarca en el estudio de los significados. Estos instrumentos favorecen la exploración directa de lo que el profesor intenta transmitir y lo que este imagina que trasmite, pero expresan de manera indirecta lo que el alumno concibe que se transmite. O sea, el profesor aporta información sobre su percepción acerca del aprendizaje del alumno. Si bien ello resulta útil y valioso, tal como señalaron los expertos, el diseño de otros dispositivos que exploren de forma más directa el pensamiento del alumno, favorecerá una aprehensión más objetiva del fenómeno objeto de estudio. En esto reside la utilidad práctica de los resultados obtenidos.

El objetivo trazado en el segundo estudio consistió en identificar los significados que poseen los profesores universitarios de matemáticas, acerca del concepto de pendiente. En esta dirección se identificaron cuatro tipos de significados: analítico, algebraico, geométrico, y contextual, a partir de las respuestas dadas por los docentes a cuatro ejercicios seleccionados. El significado geométrico se presentó con mayor frecuencia que los demás restantes, con un predominio marcado. Las evidencias empíricas sugieren que esta situación puede estar motivada por la base marcadamente intuitiva de este concepto, el cual basa sus raíces germinales en la noción de línea recta.

Capítulo VI. Conclusiones generales

El conocimiento o comprensión conceptual y procesal están fuertemente ligados a las concepciones, sin embargo constituyen un reto para profesores e investigadores, ya que varios investigadores, como Birgin (2012), Deniz y Kabael (2017), Nagle y Moore–Russo (2013a), y Wagener (2009), han reportado que los estudiantes desarrollan más el conocimiento procedimental que el conceptual. Así mismo, el estudio de las conceptualizaciones proviene del interés por desentrañar tanto el Conocimiento Pedagógico del Contenido, introducido por Shulman (1981), como las imágenes conceptuales de Tall y Vinner (1981). Sin embargo, recientemente, Beyerley y Thompson (2017) marcan una prospectiva diferente; proponen atender al Significado Matemático para la Enseñanza en vez del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball et al. (2008), ya que argumentan que el significado connota algo personal y los significados de una persona están entrelazados, mientras que el conocimiento es menos personal y más declarativo, permaneciendo separado del conocedor.

Un profesor que posee significados productivos podrá transmitir y desarrollar significados productivos en sus estudiantes. En virtud de que este enfoque se prioriza el significado sobre el conocimiento de contenidos matemáticos del profesor, mismo que puede generar cambios sustanciales tanto en la investigación como en la docencia en general y del concepto de pendiente en particular.

La mayoría de los estudios sobre pendiente se han efectuado a pequeña escala por lo que sus hallazgos son limitados y parciales; lo que implica que, a partir del desarrollo teórico actual, se debe seguir investigando sobre las causas que provocan las dificultades y los obstáculos y sobre el diseño y/o uso de alternativas didácticas que favorezcan el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente en la escuela.

En tal sentido somos del criterio que algunas de las futuras investigaciones en este ámbito pueden orientase hacia:

1 Estudiar los obstáculos y/o errores que manifiestan los estudiantes en el proceso de resolución de tareas sobre la pendiente.

2 ¿Cuáles son las causas que provocan los errores que manifiestan los estudiantes en la resolución de tareas sobre la pendiente?

3 ¿Cómo utilizar los obstáculos y/o errores sobre la pendiente para diseñar estrategias metodológicas para favorecer su proceso de enseñanza–aprendizaje?

4 Establecer las conexiones y/o relaciones entre las diferentes conceptualizaciones del concepto de pendiente en función de favorecer el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente

5 ¿Qué implicaciones tienen las conceptualizaciones de la pendiente en el proceso de formación y desarrollo de conceptos matemáticos superiores?

6 ¿Qué instrumentos elaborar y/o utilizar para investigar los significados que poseen los profesores sobre la pendiente en un determinado contexto sociocultural (léase país, estado, región)?

7 ¿Qué significados sobre la pendiente promueve o estimula el profesor en el aula? Y ¿cómo aprenden los estudiantes estos significados?

8 Extender el estudio desarrollado sobre las conceptualizaciones a otros conceptos básicos de la matemática escolar.

La estrategia presentada se ha enfocado hacia el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los docentes, en relación al concepto de pendiente. Su base estructural comprende tres etapas de elaboración, implementación y análisis, mientras que sus componentes funcionales incluyen lo cognitivo, lo didáctico y lo personológico. De esta manera se explora el grado de coherencia que tiene lugar entre lo que el docente intenta transmitir, lo que imagina que transmite, y lo que el discente concibe que se transmite como producto de un canal comunicativo de enseñanza–aprendizaje.

Un énfasis marcado se pone en el proceso de abstracción reflexiva, el cual transcurre en el componente cognitivo, donde los enunciados relacionados con el concepto de pendiente se manifiestan de manera establecida o preestablecida. Todo ello constituye un avance en la comprensión de los esquemas que se configuran alrededor de este concepto matemático. Este hecho les provee a los resultados descritos un valor argumentativo, desde una perspectiva teórica en educación matemática.

También fueron identificadas algunas problemáticas, tales como la ausencia de rigor en la representación de la idea de solución, o bien en el marco de la argumentación. Términos y frases tales como *"la pendiente de la función"*, *"a mayor ángulo de inclinación mayor pendiente"* y *"la pendiente es la derivada de la función en los puntos donde existe"* (sic) abusan del rigor y podrían provocar distorsiones en el aprendizaje. Precisamente en esta cuestión reside el mayor interés de un estudio futuro, en el sentido de estudiar cómo incide el discurso matemático del profesor en la formación de significados en el estudiante, acerca del concepto de pendiente.

Los procederes desplegados por los docentes en las soluciones, revelan una tendencia a tratar de visualizar sus ideas recurriendo a representaciones geométricas clarificadores. Por otro lado, se pudo observar ciertas relaciones que establecen los docentes entre diferentes significados del concepto analizado, fundamentalmente entre los significados geométrico y algebraico, así como los significados geométrico y analítico. Las soluciones desarrolladas reflejan también que los docentes emplean el concepto de pendiente como un recurso de comprensión, y luego como una herramienta de solución.

La contrastación empírica de un estudio con base teórico–metodológica resulta doblemente compleja. Por un lado, ha sido necesario desarrollar un estudio piloto que permita contar con evidencias tangibles de experimentación. Po otro lado, el dispositivo instrumental complementado con estas evidencias ha sido objeto de análisis por el juicio colectivo de un panel de expertos. Varios aspectos ponderan la validez interna y nominal, pero queda pendiente el problema de la validez externa a causa de las muestras limitadas de los participantes. Ello resulta esencial, pues se relaciona expresamente con las potencialidades de generalización de los hallazgos contenidos en el presente estudio. En esto reside la continuidad y perfeccionamiento requeridos para investigaciones ulteriores.

A la luz de los resultados obtenidos, se concluye que es necesario prestar mayor atención a la formación y desarrollo del concepto de pendiente, en el proceso inicial y permanente de formación del profesional de la educación matemática. Es necesario que este concepto no quede anclado en un plano estático, ya sea geométrico, analítico, algebraico, o contextual, sino interrelacionado dialécticamente en una pluralidad de planos. De este modo, el concepto de pendiente será aprehendido de modo profundo y riguroso, y transmitido en el discurso matemático como un legado cultural vivo y dinámico

Referencias bibliográficas

Akkoc, H. (2008). Pre–service mathematics teachers' concept images of radian, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857–878. DOI: 10.1080/00207390802054458

Anderson, R. C. (1984). Some reflection's on the acquisition of knowledge. *Educational Researcher*, 13(9), 5–10.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399–431.

Azcárate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilon*, 24, 9–22.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics Teachers and Children*, (pp. 216–235). London, U. K. Hodder Stoughton.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407.

Barr, G. (1980). Graphs, gradients and intercepts. *Mathematics in School*, 9(1), 5–6.

Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School*, 10(1), 14–17.

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34–42.

Besicovitch, A. S. (1946). *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions I, II.* Proc. Cambridge Phil. Soc. 41 A945), 103–110; 42, 1–10.

Beyerley, C., & Thompson, P (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathemaical Behaveor* 48, 168–193.

Biehler R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. In: Kilpatrick J., Hoyles C., Skovsmose O., Valero P. (eds) *Meaning in Mathematics Education. Mathematics Education Library*, vol. 37. Springer, Nueva York, NY. https://doi.org/10.1007/0–387–24040–3_5

Birgin, O. (2012). Investigación de la comprensión de los estudiantes de octavo grado de la pendiente de la función lineal, Bolema: *Boletín de Educación Matemática*, 26(42), 139–162.

Boyer, C. (1989). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, inc., New York.

Brown, G., Hui, S., Yu, W., & Kennedy, K. (2012). Teachers' conceptions of assessment in Chinese contexts: A tripartite model of accountability, improvement, and irrelevance. International Journal of Educational Research, 50 (5–6), 307–320.

Cantoral, R. (1988). Historia del Cálculo y su Enseñanza: del Trazado de Tangentes al concepto de derivada; Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Guatemala, Guatemala, C. A.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. Journal for Research in Mathematics Education, 33, 352–378.Carlson, M. P., Oehrtman, M. C., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment (PCA) instrument: A tool for assessing students' reasoning patterns and understandings. Cognition and Instruction, 28, 113–145.

Carlson, M. P., Oehrtman, M. C., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment (PCA) instrument: A tool for assessing students' reasoning patterns and understandings. Cognition and Instruction, 28, 113–145.

Carpenter, T.P. (1986) Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic, in J. Hiebert (ed.), Conceptual and Procedural knowledge: The Case of Mathematics, 13–132, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Cho, P., & Nagel, C. (2017). An Analysis Of Students' Mistakes On Routine Slope Tasks. Galindo, E. y Newton, J., (Eds.). Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. Presented at the Ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 369–375, Utrecht University: Netherlands.

Coe, E. (2007). Modeling teachers' ways of thinking about rate of change. Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University, Tempe, AZ.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. New York: Routledge, Taylor & Francis Group.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86. http://doi.org/10.2307/749228

Contreras, L. (2009). Concepciones, Creencias y Conocimiento: Referentes de la Práctica Profesional. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 1(1), 11—36.

Copur–Gencturk, Y. (2015). The Effects of Changes in Mathematical Knowledge on Teaching: A Longitudinal Study of Teachers' Mathematical Knowledge and Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(3), 280–330.

Cruz, M. (2009). *El Método Delphi en las Investigaciones Educacionales*. La Habana: Academia.

Cruz, M., & Rúa, J. A. (2018). Surgimiento y desarrollo del método Delphi: una perspectiva cienciométrica. *Biblios*, *71*, 90–107.

Cruz, M., & Martínez, M. C. (2012). Perfeccionamiento de un instrumento para la selección de expertos en las investigaciones educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 14(2), 167–179.

D'amore, B. (2005). Pipas, caballos, triángulo y significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. *Números*, 61, 3–18.

De Giorgi, E. (1961). *Frontiere Orientate di Misura Minima* (Sent. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1960–1961). Editrice tecnico scientifica, Pisa.

Delgado, C., Trujillo, M., Castro, N., & Guerrero, J. (2010). El concepto de función y la teoría de las situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con ayuda de calculadoras graficadoras, Bogotá, Colombia: Universidad de La Salle.

Deniz, Ö., & Kabael, T. (2017). 8th Grade Students' Processes of the Construction of the Concept of Slope, *Education and Science*, 42(192), 139–172.

Diamond, J. M. (2019). Teachers' beliefs about students' transfer of learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22, 459–487.

Díaz, M. (2013). La Razón de Cambio. Niveles de Comprensión del Profesor de Educación Básica en México. En I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, Santo Domingo, República Dominicana. Disponible en: http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/anais/doc_memorias_completo.pdf

Dolores, C., & Ibáñez G. (2020). Conceptualizaciones de la Pendiente en Libros de Texto de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(67), 825–846. https://doi.org/10.1590/1980–4415v34n67a22

Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C., García, J., & Gálvez, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación Matemática*. 29(2), 125–158. https://doi.org/10.24844/em2902.05.

Dolores, C., Rivera, M., & García, J. (2018). Exploring mathematical connections of pre– university students through task involving rate of change, *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology*. URL: http://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1507050.

Dolores, C., Rivera, M., & Moore–Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, Hoboken, 20(2), 104–115.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (ed.) Advanced mathematical thinking, 95–126, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II. En F.Hitt (Ed.) (173 – 201). México: Cinvestav. *Education Research Journal*. 11(2), 124–144.

Edwards, Jr. C. H. (1979). *The Historical Development of Calculus.* Springer–Verlag, New York Inc. USA.

Falconer, K. J. (1986). *The geometry of fractal sets.* Cambridge Tractsin Mathematics, 85. *Cambridge University Press, Cambridge*.

Federer, H. (1969). *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 *Springer–Verlag New York Inc., New York*.

Federer, H., & Fleming, W. H (1960). *Normal and integral currents*. Ann. Math. 72, 458–520.

Fernández–Plaza, J. A., Castro–Rodríguez, E., Estrella, M., Martín–Fernández, E., Rico, L.; Ruiz–Hidalgo, J. F., & Vílchez–Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 259–268). Málaga: SEIEM.

Fischer, R., & Malle, G. (1985). Lokale, bedingte Sinn–Argumentation. In R. Fischer, & G. Malle (Eds.), Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln (pp. 9–26). Mannheim.

Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84–111). Madrid: Tecnos.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *En Relime*, 6(1), 85–116.

Giordan, A., & De Vecchi, G. (1995). Los orígenes del saber: de las concepciones personales a los conceptos científicos. Investigación y aprendizaje. Sevilla, España: Díada Editora S.I.

Goldin, G, A. (2000). A scientific perspective on structured, task–based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R, Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 517–545), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, E., Fernando, D., Aponte, G. & Betancourt, L. (2014). Metodología para la revisión bibliográfica y la gestión de información de temas científicos, a través de su estructuración y sistematización. Dyna [en linea] 81. Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49630405022> ISSN 0012–7353

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57–72.

Hardt, R., & Simon, L. (1986). *Seminar on Geometric Measure Theory*. Birkhauser, Boston, (§3.11).

Hauger, G. (1997). Growth of Knowledge of Rate in Four Precalculus Students. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (Chicago, IL, March 24–28).

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. del P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México, D. F. McGraw Hill Education.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 65–97. Macmillan Publishing Co, Inc: New York.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, 1–28. Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NJ.

Hitt, F. (2001). El papel de los Esquemas, las Conexiones y representaciones Internas y Externas Dentro de un Proyecto de Investigación en Educación matemática. Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática, 165–177.

Hoffman, W. (2015). Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task–based interviews. (Doctoral dissertation). The University Of North Carolina At Charlotte.

Howson, G. (2005). "Meaning" and School Mathematics. In Kilpatrick, J.; Hoyles, C; Skovsmose, O.; Valero, P. (Eds.). *Meaning in Mathematics Education* (pp. 17–38). New York: Springer.

Hwang, C. L., & Yoon, K. (1981). *Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications*. Berlin: Springer.

IBM Corp. (2020). IBM SPSS Statistics for Windows (version 27.0) [*Computer software*]. www.ibm.com/analytics/spss–statistics–software/

Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs representing situations–studies and teaching experiments. (Doctoral Dissertation, University of Nottingham, England). *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 87–116.

Keitel, C., & Kilpatrick, J. (2005). Mathematics education and common sense. In Kilpatrick, J.; Hoyles, C; Skovsmose, O.; Valero, P. (Eds.). *Meaning in Mathematics Education* (105–128). New York: Springer.

Kilpatrick, J., Hoyles, C., & Skovsmose, O. (2005). Introduction. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 1–8). New York, Springer.

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2–3), 137– 174.

Leinhardt, G., Zaslavky, O. y Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.

Leong, W. (2014). Knowing the intentions, meaning and context of classroom assessment: A case study of Singaporean teacher's conception and practice. *Studies in Educational Evaluation*, 43, 70 –78.

Malhotra, N. K., Nunan, D., & Birks, D. F. (2017). Marketing Research. An Applied Approach. NY: Pearson.

Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*, Schriftenreihe für den Referenten. [Series for the Referee], W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA.

Martin, E., Ruiz, J. F., & Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales**.** *Enseñanza de las Ciencias*, 34(3), 1–71.

Martínez de la Rosa, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. *En Suma*$^{+}$, 61, 7–

McDermott, L., Rosenquist, M., & van Zee, E. (1983). Student difficulties in connecting graphs, concepts and physical phenomena. Presented at the American Educational Research Association meetings, Montreal, Canada.

McDiarmid, G. W., Ball, D. L., & Anderson, C. W. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject–specific pedagogy. In M. C. Reynolds (ed.), *Knowledge base for the beginning teacher*, 193–205, Pergamon: Oxford, UK.

McGee, D., Moore–Russo, D., & Martinez, R. (2015) Making Implicit Multivariable Calculus Representations Explicit. A Clinical Study, *PRIMUS*, 25 (6), 529–541, DOI: 10.1080/10511970.2015.1038858.

Moore–Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. (2011a). Can slope be negative in 3–space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., & Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología*, 26(2), 299– 334.

Moreno, L. (1996). La epistemología genética: una interpretación. *Educación Matemática*, 8(3), 5–33.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 21(2), 265–280.

Mudaly, V., & Moore–Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education programme. *Pythagoras*, 32(1), 1−8

Nagle, C., & Moore–Russo, D. (2013). Slope: A Network of Connected Components. In Martinez, M. & Castro Superfine, A. (Eds.). Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Chicago, University of Illinois at Chicago.

Nagle, C., & Moore–Russo, D. (2014). Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *The Mathematics Educator*, 23 (2), 40–59.

Nagle, C., & Moore–Russo, D. (2014a). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(2), 1–18.

Nagle, C., & Moore–Russo, D. (2013a). Connecting slope, steepness, and angles. Mathematics teacher, 107(4), 272–279.

Nagle, C., Casey, S., & Moore–Russo, D. (2017). Slope and Line of Best Fit: A Transfer of Knowledge Case Study, School Science and Mathematics, 117(1−2), 13−26.

Nagle, C., Martínez–Planell, R., & Moore–Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, *54*, [100684]. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.003

Nagle, C., Moore–Russo, D., & Styers J. (2017). Teachers' Interpretations of Student Statements About Slope. Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators. 589– 596.

Nagle, C., Moore–Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013a). Calculus student´s and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491–1515.

NCTM (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Resumen Ejecutivo. http://centroedumatematica.com/ciaem/archivos/RE_NCTM.pdf

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In: W. Blum, P. L. Galbraith, H.–W. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study (pp. 3–32). NY: Springer.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., & Tierney, C. (2000). Experiencing Change: The Mathematics of Change in Multiple Environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 85–108.

Oktaç, A., & Çetin, İ. (2016). APOS teorisi ve matematiksel kavramların öğrenimi. E. Bingölbali, S. Arslan, & İ. Ö. Zembat (eds.) *Matematik eğitiminde teoriler*, 163– 182, Pegem: Akademi. Ankara

Park, S., Jang, J., Chen, Y., & Jung, J. (2011). Is pedagogical content knowledge (PCK) necessary for reformed science teaching?: evidence from an empirical study. *Research in Science Education*, 41(1), 245–260.

Pérez, A., & Gimeno, J. (1988). Pensamiento y acción en el profesor: de los estudios sobre la planificación al pensamiento práctico. *Infancia y Aprendizaje*, *42,* 37–63.

Piaget, J., & García, R. (1991). *Toward a logic of meanings*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1976). *Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales*. Buenos Aires: Guadalupe.

Preece, J. (1983). Graphs are not straightforward. En T. R. G–Green y S. J. Payne (eds.) The Psycology of Computer Use: A European Perspective, 41–56. Academic Press: London.

Radford, L. (2002a). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14– 23.

Radford, L. (2002b). On heroes and the collapse of narratives. A contribution to the study of symbolic thinking. Proceedings of the PME 26 Conference, Vol. 4, pp. 81–88. University of East Anglia, UK.

Radford, L. (2006). Educational Studies in Mathematics 61: 39–65. http://DOI: 10.1007/s10649–006–7136–7.

Remesal, A. (2006). Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos, tesis doctoral, Barcelona: Universidad de Barcelona (www.tesisenxarxa.net/TDX–1023106–140538/index.html).

Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39 – 63.

Rittle–Johnson B., & Schneider M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Cohen and A. Dowker (eds) *Oxford handbook of numerical cognition*, 1118–1134, Oxford University Press: Oxford.

Rittle–Johnson, B., & Koedinger, K. R. (2009). Iterating between lessons concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79, 483–500.

Rivera, M., & Dolores, C. (2017). Concepciones de la Pendiente en el Curriculum Oficial de la Educación Básica. En Congreso Nacional de Matemática Educativa – COMIE. San Luis Potosí.

Rivera, M., Salgado, G., & Dolores, C. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. Bolema: *Boletim de Educação Matemática*, *33*(65), 1027–1046. Epub December 02, 2019.https://doi.org/10.1590/1980–4415v33n65a03

Royer, J. M., Mestre, J. P., & Dufresne, R. J. (2005). Introduction: Framing the transfer problem. In J. Mestre (ed.) Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective, vii–xxvi.

Greenwich, CT: Information Age.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1–36.

Shulman, L. (1981). Disciplinas de investigación en educación: una visión general. *Investigador educativo*, 10 (6), 5–23.

Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs for the study of teaching. In M.C. Wittrock (Ed.), Handbook of Research on Teaching (3rd ed.). New York: Macmillan.

Silverman, J.; Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 11, 499–511.

Sofronas, K., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the firs–year calculus? Perspectives of 24 experts. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 131–148.

Stanton, M., & Moore–Russo, D. (2012). Conceptualizations of Slope: A Review of State Standards. *In School Science and Mathematics,* 112 (5), 270–277.

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? – An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 133–162.

Stump, S. (1999): Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of Slope. *Mathematics Education Research Journal,* 11 (2), 124–144.

Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior,* 20, 207–227.

Stump, S. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101, 81– 89.

Suh J.M., & Fulginiti K. (2011) Developing Mathematical Potential in Underrepresented Populations through Problem Solving, Mathematical Discourse and Algebraic Reasoning. In: Sriraman B., Lee K.H. (eds) *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*. Advances in Creativity and Giftedness, vol 1. SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978–94–6091–439–3_5

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definitions in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169. Tempe, AZ: Arizona State University.

Tesuscher, D., & Reys, R. (2012). Rate of Change: AP Calculus Students' Understandings and Misconceptions After Completing Different Curricular Paths. In School Science and Mathematics, 112 (6), 359–376.

Teuscher, D., & Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*, 103, 519–524.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research, en Grouws, D. (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, 127–146. Macmillan: Nueva York.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229–274.

Thompson, P. W. (1994a). The development of the concept of speed and its relationship to the concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 179–234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. In Leatham, K. (ed.) Vital directions for research in mathematics education, 57–93. Springer: New York.

Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In English, L., & Kirshner, D. (Eds.), Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 435–461). London: Taylor and Francis.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.). Compendium for research in mathematics education (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994a). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 279–303.

Turner, E., Wilhelm, J., & Confrey, J. (2000). Exploring Rate of Change through Technology with Elementary Students. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, April 24–28).

Vinner, S. (1994). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.) Advanced Mathematical Thinking, 65–81. *Kluwer Academic Publishers*: Dordrecht, Holland.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for *Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.

Vollstedt, M. (2011). Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong. Eine rekonstruktiv–empirische Studie. Wiesbaden, Germany: Vieweg+Teubner.

Wagener, LL. (2009). A worthwhile task to teach slope. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(3), 168–174.

Walter, J. G., & Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 203–233.

Wang, T.–C., & Lee, H.–D. (2009). Developing a fuzzy TOPSIS approach based on subjective weights and objective weights. *Expert Systems with Applications*, 36(5), 8980–8985.

Zaslavsky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics.

Journal for research in Mathematics Education, 18(1), 3–14.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119–140.

ANEXOS

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA EXPLORAR LOS SIGNIFICADOS DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA.

Saludos.

Somos investigadores pertenecientes al CIMATE de la Universidad Autónoma de Guerrero; estamos realizando un estudio sobre los significados para la enseñanza que poseen los docentes profesores sobre el concepto de pendiente. Deben de sentirse libres de expresar sus ideas, relacionadas con el tema objeto de estudio. En este espacio no existe respuesta correcta o incorrecta lo que realmente importa para nuestro trabajo es la sinceridad de sus criterios y argumentaciones.

El objetivo es identificar y valorar los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente y en la misma dirección, explorar las estrategias que empelan para tratar dicho concepto.

Hemos de esclarecer que la información obtenida, es solo para nuestro trabajo, sus respuestas serán tratadas de manera anónima y bajo ningún concepto se identificará lo expresado por cada participante. Con la finalidad de hacer más ágil la toma de información, resulta de mucha utilidad grabar la conversación, pues la toma de notas consume mucho tiempo y se puede perder información importante. ¿Hay algún inconveniente con que se grabe la conversación? La grabación es solo con fines de análisis.

Le agradecemos de antemano por su tiempo y su contribución.

Datos Personales: Escuela donde trabaja\Antigüedad en la docencia\Formación Profesional

OBJETIVO: conocer los significados para la enseñanza que poseen los profesores que conformaran la muestra de investigación sobre el concepto de pendiente.

1. ¿Considera usted que los significados de los conceptos matemáticos inciden en el desempeño de los estudiantes? ¿Por qué?
2. ¿Qué significados le atribuye usted al concepto de pendiente? ¿Lo considera un concepto esencial en la formación matemática? ¿Por qué?

3. ¿Con qué conceptos se relaciona el concepto de pendiente? Por favor, describa esta relación a través de un mapa conceptual.
4. Formule un enunciado (una proposición, un problema) que contenga el concepto de pendiente y explique qué significados tiene este para usted. ¿Cómo lo explicaría a sus estudiantes? ¿Qué imagina usted que entenderán sus estudiantes?
5. ¿Cuáles de los significados antes mencionados sobre el concepto de pendiente (pregunta 2) trata usted en clases? ¿Por qué?
6. ¿Qué dificultades se presentan en la enseñanza de la pendiente? ¿A qué causas atribuye estas?
7. ¿Cómo usted enseña el concepto de pendiente a sus estudiantes?

¡Muchas gracias!

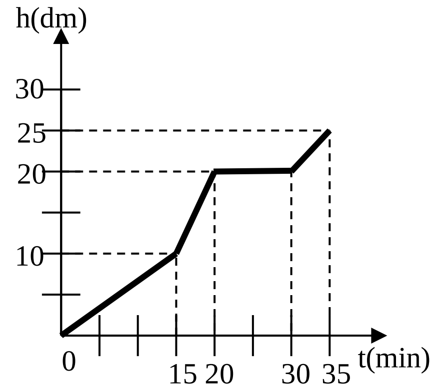
CUESTIONARIO

Nombre del profesor:____
Escuela donde trabaja: ____

Años de antigüedad:________________ Fecha de aplicación:_____________

1. La gráfica muestra la altura que va alcanzando el agua en el proceso de llenado de un tanque al abrirse una llave durante ciertos intervalos de tiempo hasta que se llena totalmente.

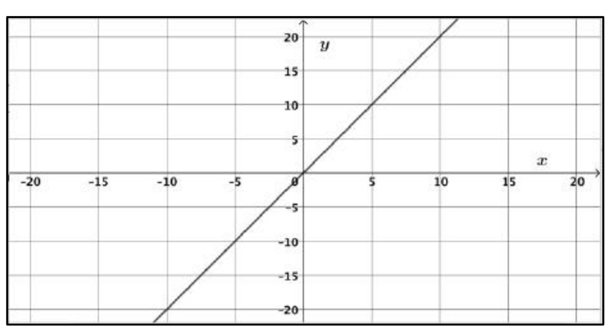
a) ¿Se detuvo el proceso de llenado en algún momento? Durante qué tiempo.
b) Con qué rapidez se llena el tanque durante los primeros 15 minutos.
c) Selecciona la respuesta correcta:
A los 18 minutos el agua dentro del tanque tenía una altura de:
A) ___ 19 dm B) ___ 16 dm C) ___ 15 dm
D) ___ 18 dm. Fundamenta tú selección.
d) En qué tramo la altura del agua aumentó más rápidamente. Justifique.
e) Determina la ecuación de la función que modela el ascenso de la altura del agua dentro del tanque durante el tiempo que duró el proceso



2. Un móvil parte del reposo y aumenta su velocidad con una aceleración constante de $\boldsymbol{4\ m/s^2}$ hasta llegar a los $\boldsymbol{24\ m/s}$. El móvil viaja a dicha velocidad durante $\mathbf{15}$ segundos y luego comienza el proceso de frenado reduciendo su velocidad a razón $\boldsymbol{6\ m/s^2}$.
a) Halle una función que modele la situación anterior.
b) ¿Explica lo que significa la aceleración en el modelo propuesto?
c) ¿Cuándo se detendrá el móvil?
d) Representa la gráfica de la función hallada.

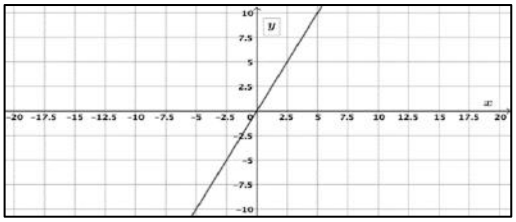
3. Dos corredores comienzan una carrera al mismo tiempo y terminan en empate. Probar que en algún momento de la carrera ambos corredores tenían la misma velocidad.

4. Considere la siguiente gráfica:

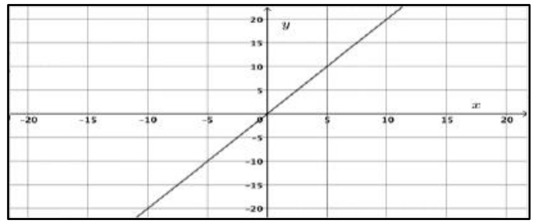


Diga cuál o cuáles de las siguientes rectas tiene la misma pendiente que la recta de la gráfica anterior. Justifique su o sus respuestas.

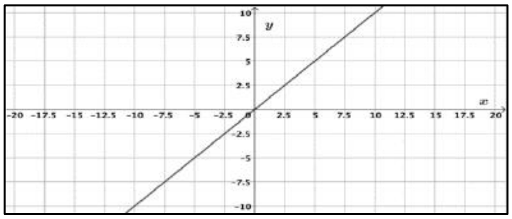
a)



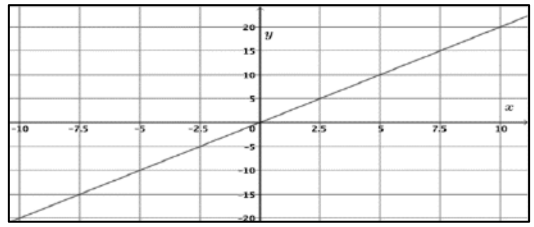
b)



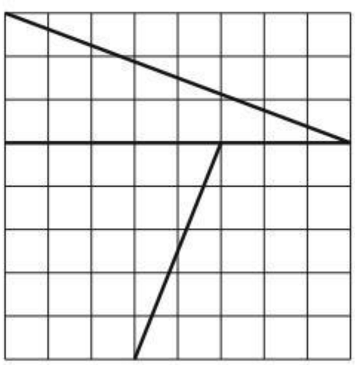
c)

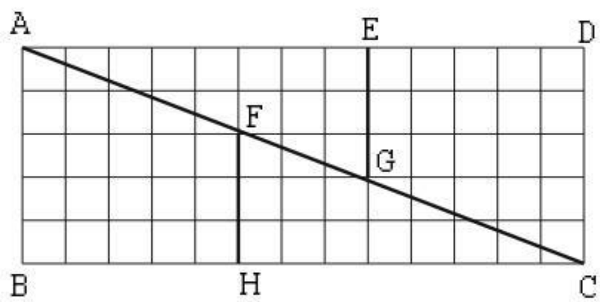


d)

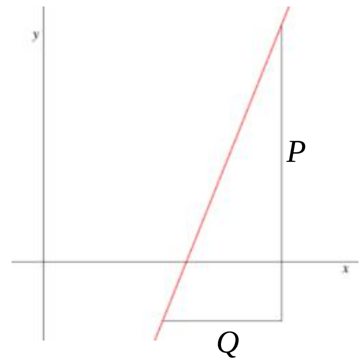


5. Pedro va a un almacén y le dice al dependiente que viene a comprar 65 m2 de alfombra para el piso de su casa que tiene exactamente esa área. El dependiente le responde que le queda solo un rollo de 500 m2 y de él ya tiene vendidos 436 m2, por lo que solo puede venderle los 64 m2 restantes. Después de pensarlo un poco Pedro le dice al dependiente que traerá, en una cartulina, un cuadrado de 8 m de lado (que tiene 64 m2), lo va a dividir en 4 partes iguales 2 a 2 como se muestra en la figura de la izquierda y con ellas va a formar el rectángulo que se muestra en la figura de la derecha, que sería la parte de la alfombra que se llevaría. De ser usted el dependiente ¿Estaría de acuerdo con la proposición de Pedro? Explique su respuesta.





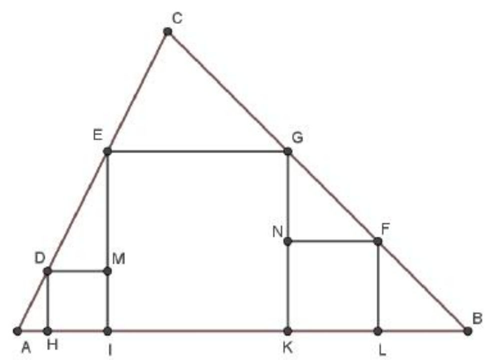
6. Sean las cantidades P y Q cuyos valores varían. La medida de P es la longitud del segmento paralelo al eje “y”, la medida de Q es la longitud del segmento paralelo al eje “x”. $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ están relacionados de modo que $\boldsymbol{y = mx + b}$. La gráfica de su relación se da a continuación (x e y en la misma escala). ¿Cuál es el valor numérico de $\boldsymbol{m}$?



6.1 Los ejes coordenados se dilatan (se estiran) de modo que las unidades en cada eje es el doble de las unidades originales, ¿qué significado atribuye a la transformación aplicada al plano?, ¿se conservan las longitudes?, ¿las amplitudes?, ¿y las razones?, ¿bajo esta transformación varía el valor de la pendiente m?

6. 2. ¿Cuál sería el valor numérico de m si el eje “y” se estirara de modo que la distancia entre 0 y 1 sea 2 veces la original?

7. Sea el triángulo ABC, los puntos D, E, F, G, H, I, K, L, están sobre los lados de dicho triángulo (ver figura). Los cuadriláteros HIMD, IKGE y KLFN son cuadrados cuyas áreas miden $\boldsymbol{4\,u^2, 36\,u^2\ y\ 9\,u^2}$, respectivamente. Determine el área del triángulo $\boldsymbol{ABC}$.



a) Resuélvelo por otra vía y diga si existe alguna relación o algún concepto relacionante entre ambas vías de solución.

8. Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, diga cuál(es) de los enunciados siguientes consideras correcto o incorrecto y justifica en cada caso.

a) La derivada de una cierta función en cada punto del plano es $f(x, y)$.

b) La pendiente de una función en cada punto del plano donde existe el valor de f, es exactamente el valor de f en dicho punto.

c) La ecuación determina en cada punto donde existe el valor de f, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva solución en este punto.

d) La razón de cambio de una función con respecto a la variación del valor de la variable independiente es $f(x, y)$.

9. Un número $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto fijo de la función $\boldsymbol{f}$ si $\boldsymbol{f(a) = a}$. Sea $\boldsymbol{f}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ y tal que $\boldsymbol{f'(x) \neq 1}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\boldsymbol{f}$ tienen a lo sumo un punto fijo.

10. Resuelve geométricamente la siguiente ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$.

Guía para la entrevista grupal:

Introducción

Saludos.

Somos investigadores pertenecientes al CIMATE de la Universidad Autónoma de Guerrero; estamos realizando un estudio sobre los significados para la enseñanza del concepto de pendiente que poseen los profesores. Deben de sentirse libres de expresar sus ideas, relacionadas con la temática estudiada. En este espacio no existe respuesta correcta o incorrecta lo que realmente importa para nuestro trabajo es la sinceridad de sus criterios y argumentaciones.

El objetivo es conocer los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente y en la misma dirección, explorar las estrategias que empelan para tratar dicho concepto.

Hemos de esclarecer que la información obtenida, es solo para nuestro trabajo, sus respuestas serán tratadas de manera anónima y bajo ningún concepto se identificará lo expresado por cada participante. Con la finalidad de hacer más ágil la toma de información, resulta de mucha utilidad grabar la conversación, pues la toma de notas consume mucho tiempo y se puede perder información importante. ¿Hay algún inconveniente con que se grabe la conversación? La grabación es solo con fines de análisis.

Le agradecemos de antemano por su tiempo y su contribución.

Pregunta Introductoria.

¿Qué significado tiene para usted el término pendiente?, y ¿el enunciado la pendiente de la recta o la pendiente de la función lineal?, ¿algo más?

¿Lo consideras un contenido complejo para ser tratado con sus estudiante?, ¿por qué? ¿Con qué otros conceptos está relacionado el concepto de pendiente?, ¿alguno más?

Dado los siguientes enunciados:

a) Se llama pendiente o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

b) Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos cualesquiera de ellos $P_1\ (x_1\ , y_1)$ y $P_2\ (x_2\ , y_2)$, el valor de la pendiente m calculado por medio de la fórmula $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, con $x_1 \neq x_2$ resulta siempre constante.

c) Un número $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto fijo de la función $\boldsymbol{f}$ si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$. Sea $\boldsymbol{f}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ y tal que $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{1}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\boldsymbol{f}$ tienen a lo sumo un punto fijo.

d) Un corredor recorre una pista de $6\,km$ en $45\,minutos$. ¿En algún momento del recorrido, el corredor alcanzó la velocidad de $8\ km/h$? ¿Qué debe entender un estudiante para poder resolver esta tarea?

¿Qué trasmitirías de este? ¿Qué imaginas que entenderían tus estudiantes del mismo? ¿Consideras necesario el uso de representaciones gráficas o geométricas en PEAM en general y en particular de estos problemas, por qué?

Les solicitamos a los participantes que produzcan un enunciado en el que esté involucrado el concepto de pendiente y seguidamente les planteamos las preguntas: ¿Qué trasmitiría de este? ¿Qué imaginas que entienden sus estudiantes del mismo?

Finalmente, ¿Algún otro comentario que quiera agregar? ¡Muchas Gracias!