UAGro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Estudio de los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría APOE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

ESTEBAN MENDOZA SANDOVAL

DIRECTORES DE TESIS:

DRA. FLOR MONSERRAT RODRÍGUEZ VÁSQUEZ

DR. JESÚS ROMERO VALENCIA

CHILPANCINGO DE LOS BRAVO, GUERRERO

ENERO 2022

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** (CONACYT) por el apoyo financiero otorgado para realizar mis estudios de doctorado y el recurso brindado para una estancia de investigación en la Universidad de Salamanca (USAL), España, que se materializa con este trabajo de investigación.

Becario No. **441052**

Dedicatoria

A mis padres:

Donaciano Mendoza Soloya y Florentina Sandoval Olivares son mi razón de ser, mi inspiración para seguir escalando peldaños en el mundo del saber, disfrutar la dicha de tenerlos a mi lado, por el amor, cariño y comprensión incondicional en cada momento. Atte. El niño que para ir a clases en la primaria cada día repetía: ¡otra vez a la escuela, yo no quiero ir!

A mi corazón pequeño y su mamá:

Porque las fracturas rompen el corazón pero no los sueños. Yoltzin, para ti con todo mi amor, gracias por enseñarme a ser más humilde y fuerte; Natividad, gracias por estar, quedarte a mi lado y tener juntos a nuestro corazón pequeño.

A mis hermanos:

Xitlali Mendoza Sandoval, Daniel Mendoza Sandoval por compartir conmigo cada logro y dificultad en el trayecto de nuestras vidas, apoyándome en todo instante y estar siempre unidos.

A mis sobrinas:

Magui y Florecita, por llenar el hogar y mi corazón de alegría y risas.

A mi cuñado:

Israel Oyorzabal Rojas, por ser un gran amigo y ser humano.

Al Dr. Edgardo Locia:

Dr. Locia, sin usted este logró no hubiese sido posible. Por aconsejarme a continuar en el estudio de las matemáticas cuando me daba por vencido. Sin su motivación no hubiese continuado. Además, esa charla cuando yo quería abandonar la facultad y gracias a usted y sus palabras me quede a terminar la licenciatura, mil gracias.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a la Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez y al Dr. Jesús Romero Valencia por aceptar dirigir este proyecto de investigación. Por darme las pautas para lograrlo, además, gracias por su tiempo brindado para mejorar este trabajo de investigación.

Le doy gracias a los revisores de esta investigación: Dra. Darly Alina Kú Euán, Dr. Edgardo Locia Espinoza, Dr. Jesús Romero Valencia y Dr. Gustavo Martínez Sierra. Por las sugerencias y observaciones brindadas.

Agradezco al Dr. Armando Morales por guiarme en mi formación académica y motivarme en todo momento para seguir preparándome.

Agradezco a mis compañeros de generación y amigos: Melby, Landy, Erika, Angie, Safira, Noé, Eddie y Gustavo. Por esos momentos de reflexión y experiencias que pasamos juntos, los cuales fueron muy productivos. Además, agradezco su cariño, comprensión y su tiempo que compartieron conmigo, son momentos muy especiales y agradables para mí.

Le doy gracias a toda mi familia por su apoyo, sin ustedes soy nada.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El estudio de la comprensión de conceptos en Álgebra Lineal es un tema de interés en educación matemática, principalmente por la abstracción y complejidad que presentan. Un concepto objetivo de enseñanza del álgebra lineal en una licenciatura en matemáticas es el operador lineal diagonalizable, por lo que, con base en la teoría APOE, se conjetura sobre un modelo cognitivo que considera su construcción como un objeto. Además, con el mismo sustento teórico, se propone una caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables. Se siguió un enfoque cualitativo, debido a que se analizaron e interpretaron atributos cognitivos de manera individual. Se aplicó un cuestionario y se realizaron entrevistas semiestructuradas a estudiantes de posgrado en matemáticas (25-30 años de edad). Los resultados evidencian dos vías de construcción que siguieron los estudiantes en la construcción del concepto de estudio, en las cuales se requieren las estructuras mentales conjeturadas en la descomposición genética preliminar. Además, se encontró que los estudiantes entrevistados, con su concepción proceso de matriz semejante prefieren determinar si la representación matricial del operador lineal es semejante a una matriz diagonal que coordinar los procesos de base ordenada y vectores propios en el proceso base propia. Con respecto al esquema de los operadores lineales diagonalizables, con base en los resultados se expresó un modelo que caracteriza los niveles de desarrollo del concepto de investigación, además se encontró que existe la predisposición de considerar a los operadores lineales diagonalizables como aquellos cuya representación matricial asociada a una base es diagonal y que la coherencia del esquema se fundamentó en la comparación de la multiplicidad algebraica del valor propio con la dimensión del espacio generado por ese valor propio como criterio para decidir si un operador lineal se puede diagonalizar (si para cada valor propio de multiplicidad m produce exactamente m vectores propios linealmente independientes).

Palabras clave: Álgebra lineal, esquema, operadores lineales diagonalizables, teoría APOE.

ABSTRACT

The study of concepts understanding in linear algebra is an interesting topic in mathematics education, mainly due to the abstraction and complexity they present. A goal for the teaching of linear algebra in a mathematics degree course is that of a diagonalizable linear operator concept, therefore, based on APOS theory, a cognitive model that considers its construction as an object is given. In addition, with the same theoretical support, a characterization of the levels of development of the scheme of the diagonalizable linear operators is proposed. A qualitative approach was followed since cognitive attributes were analyzed and interpreted individually. A questionary was applied and a semi-structured interview to postgraduate students (25- 30 years old). The results show two ways of construction followed by the students to construct the study concept, which required conjectured mental structures obtained from preliminary genetic decomposition. In addition, it was found that the students prefer to determine whether the matrix representation of the linear operator is similar to a diagonal matrix than to coordinate the ordered basis and eigenvectors processes in the eigenbasis process, with their conception process of the similar matrix. Concerning the scheme of diagonalizable linear operators, based on the results, a model that characterizes the levels of development of the research concept was expressed. It was also found that there is a predisposition consider to diagonalizable linear operators as those whose matrix representation associated to a basis is diagonal and that the coherence of the scheme was based on the comparison of the algebraic multiplicity of the eigenvalue with the dimension of the space generated by that eigenvalue as a criterion to decide whether a linear operator can be diagonalized (if for

each eigenvalue of multiplicity m it produces exactly m linearly independent eigenvectors).

Keywords: Linear algebra, schema, diagonalizable linear operator, APOS theory.

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es una asignatura o unidad de aprendizaje que conforme con los planes y programas de estudios se propone su enseñanza en educación superior. Esta unidad de aprendizaje se incluye en la formación de estudiantes de carreras de matemáticas y afines. Esta asignatura es considerada de gran interés por su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático y su aplicación en diferentes asignaturas de matemáticas. De acuerdo con Siap (2008), al Álgebra Lineal se le considera como el primer curso formal en una licenciatura de matemáticas o carreras afines. Por otro lado, se piensa que es difícil alcanzar los objetivos de enseñanza y que esto es derivado de la naturaleza compleja de la asignatura (Hillel y Sierspinska, 1994; Hillel, 2000).

Entre los conceptos que se estudian en el Álgebra Lineal están los operadores lineales diagonalizables. Estos operadores lineales específicos, involucran diversos conceptos y relaciones entre ellos. Usualmente en los cursos de Álgebra Lineal se enseña la importancia de diagonalizar a los operadores lineales, cuando son diagonalizables, dado que, simplifica significativamente los cálculos al tener una representación matricial y sencilla, y esto produce un mejor entendimiento de cómo actúa un operador lineal sobre el espacio vectorial en el cual se ha definido.

Para lograr esta representación matricial y sencilla de un operador lineal, se necesita que el estudiante comprenda diferentes relaciones entre conceptos las cuales resultan complejas. Por lo tanto, se realizó una investigación acerca de la comprensión de los operadores lineales diagonalizables.

Para realizar la investigación acerca de la comprensión de los operadores lineales diagonalizables, se consideró como marco teórico a la teoría APOE, es decir, se especifica la comprensión de un concepto matemático desde esta perspectiva teórica. Posteriormente, se propone un modelo que describe las estructuras y mecanismos que un estudiante podría necesitar con la finalidad de construir como un objeto cognitivo el concepto de indagación. Después, se tomó una postura sobre el esquema y se caracterizó su desarrolló del esquema de los operadores lineales diagonalizables. Dichos modelos pueden ser utilizados como directrices para el diseño de actividades para mejorar la comprensión de los estudiantes acerca del concepto de interés, el cual es una noción de aprendizaje fundamental del Álgebra Lineal.

El modelo cognitivo propuesto es consecuencia de un ajuste que se realizó al paradigma de investigación que propone la teoría APOE (ver sección 3.3). Por otro lado, se presenta la estructura del trabajo de investigación la cual está compuesta por cinco capítulos que se describen a continuación:

En el capítulo 1. Se expone a grandes rasgos el origen del Álgebra Lineal. A continuación, se describe brevemente la enseñanza y aprendizaje de algunos temas de esta asignatura. En seguida, se presentan algunas investigaciones respecto a los operadores lineales diagonalizables o acercamientos al concepto a estudiar. Después, se presenta la pregunta y objetivo de investigación.

En el capítulo 2. Se presenta el marco teórico que sustenta la investigación. Primero, se presenta una descripción detallada de las estructuras y mecanismos mentales que propone la teoría APOE. Posteriormente, se trata la estructura esquema y cómo se consideró en la investigación.

En el capítulo 3. Se presenta el diseño metodológico. Para comenzar, se describe el tipo de investigación y participantes. Después, se expone el paradigma de investigación de la teoría APOE. Posteriormente, se especifica el diseño metodológico de investigación y las variantes que se hicieron al paradigma de investigación que propone la teoría APOE. En seguida, se exhibe el análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables del cual proviene lo siguiente: 1) Una descomposición genética preliminar de los operadores lineales diagonalizables; 2) Una descripción de los niveles de desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables preliminar. A continuación, con base en la descomposición genética preliminar y el desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables preliminar se presenta el diseño y análisis a priori del instrumento de investigación. Consecutivamente, se explica a detalle la aplicación del instrumento de investigación dejando su análisis para el próximo capítulo. Inmediatamente, se presenta como fue recolectada la información.

En el capítulo 4. Se presenta el análisis de los datos. Para comenzar, se presenta cómo se hizo el análisis de la información. Después, se expone el análisis a posteriori del instrumento de investigación que corresponde al cuestionario. Posteriormente, se exhibe el análisis a posteriori del instrumento de investigación que corresponde a la entrevista.

En el capítulo 5. Se presentan las conclusiones con base en el objetivo de investigación. Se propone una descomposición genética que considera la construcción en un individuo de los operadores lineales diagonalizables como un objeto cognitivo. Posteriormente, se presenta la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables: intra-operadores lineales diagonalizables, inter-operadores lineales diagonalizables y trans-operadores lineales diagonalizables sobre la base de las relaciones obtenidas como evidencia recolectada por parte de los individuos en la situación de construir una base, cuyos elementos son vectores propios (si existen) o encontrar una matriz diagonal similar (si existe) a la representación matricial del operador lineal dado. Después, se dan sugerencias pedagógicas para el tratamiento de los operadores lineales diagonalizables en cursos regulares de Álgebra Lineal y algunas reflexiones finales que se desprenden del estudio.

CAPÍTULO 1. ÁLGEBRA LINEAL

Este capítulo se encuentra estructurado en cuatro secciones. En la primera sección, se explica de manera general el origen del Álgebra Lineal. En la segunda sección, se expone de manera breve la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal. En la tercera sección, se presentan investigaciones acerca de los operadores lineales diagonalizables. En la cuarta sección, se describe la pregunta y objetivo de investigación.

1.1 Origen del Álgebra Lineal

De acuerdo con Bourbaki (1969) en los orígenes de las matemáticas se encuentran diversos problemas que se pueden resolver por medio de una única operación (multiplicación o división), esto es, calculando un valor de una función de la forma $g(x) = ax$, o encontrando la solución de una ecuación de la forma $cx = d$ y estos ya son problemas que conciernen al Álgebra Lineal. Así mismo, Bourbaki (1969) menciona que estos problemas no se pueden tratar "sin pensar linealmente".

Por otro lado, el contexto relacionado con las ecuaciones de primer grado se apartaba para la enseñanza elemental. Tuvo que pasar mucho tiempo para que el desarrollo de las nociones de campo, anillo, espacio vectorial, espacio topológico, etc., manifestaran la importancia y valoraran las nociones del Álgebra Lineal; es entonces cuando se percibió el carácter esencialmente lineal de casi toda el álgebra moderna (Bourbaki , 1969). Así, la linealidad es una característica esencial de esta asignatura, entendiendo por ella como la preservación de estructura bajo una transformación.

Podríamos preguntarnos ¿Cuál fue el motivo de las primeras ideas del Álgebra Lineal? Y para respondernos esto consideremos las ideas expuestas en Bourbaki (1969), mencionan que el Álgebra Lineal surge como una necesidad de los calculadores prácticos, con la regla de tres y la regla de la falsa posición, y que además son enunciadas confusamente pero desempeñan un papel crucial en todos los escritos de la aritmética práctica, desde el Papiro Rhind de los Egipcios, el cual como expresa Struik (1998) fue descubierto en 1858 y escrito alrededor de 1650 a.C. hasta trabajos de Aryabhata, los Árabes, Leonardo de Pisa e incontables "libros de cálculo" de la edad media y el renacimiento.

Por otro lado, la relación entre un sistema de ecuaciones y una matriz de acuerdo con Rosales (2009) aparece en escritos de los Babilónicos, sobre el 300 a.C. con enunciados del siguiente tipo:

> Tenemos dos campos con un área de 1800 yardas cuadradas. Uno produce grano en razón de $\frac{2}{3}$ de celemín por yarda cuadrada, mientras que el otro lo hace en razón de $\frac{1}{2}$ de celemín por yarda cuadrada. Si el total de la cosecha es de 1100 celemines ¿qué dimensiones tienen los campos? (Rosales, 2009, p. 2)

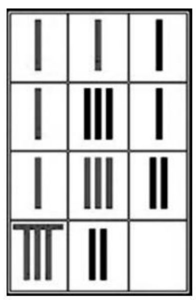
De acuerdo con Rosales (2009) en China entre los años 200 y 100 a.C. aparece el libro "Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático" durante la dinastía Han, el libro contiene el ejemplo del método matricial aplicado al siguiente problema:

> Hay tres tipos de trigo, de los que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas, dos del primero, tres del segundo y una del tercero son 34 medidas; una del primero, dos del segundo y tres del tercero son 26 medidas ¿Cuántas medidas de cada tipo de trigo contiene un saco? (Rosales, 2009, p. 3).

Por su parte Webb y Abels (2011) mencionan que en el periodo 300 a.C. a 200 d.C. en libro de "Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático" se encuentra un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales y afirman que Chiu Chang Suan Shu usó "notación matricial”. Básicamente la representación consiste en disponer los coeficientes de las incógnitas en columnas, representados por unas barras que son utilizadas para contar y cada columna representa una ecuación, las barras rojas representan coeficientes positivos, mientras que las barras negras representan coeficientes negativos. Consideremos el ejemplo de Josep (2000) citado en Webb y Abels (2011), ver Figura 1.

Figura 1

“Notación matricial” Empleada por los Chinos



This diagram represents the following system of equations in three unknowns. Each column represents one equation and should be read from right to left:

$$-x-y-2z = 0$$
$$x-3y+3z = -2$$
$$x+y+z = 8$$

Nota: Adaptado de *Secondary Algebra Education. Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (p. 113), Webb & Abels, 2011, Sense Publishers.

No se explicará cómo los chinos o babilónicos eran capaces de resolver sistemas de ecuaciones lineales, nos conformaremos con aceptar, que se tenía conciencia de disponer una manera ordenada de arreglar las ecuaciones y que al menos los chinos utilizaban implícitamente las operaciones elementales (se usaron operaciones de columna para resolver el sistema, matemáticamente esas operaciones son consistentes con las operaciones elementales sobre renglones que se usan para resolver matrices aumentadas) para poder dar solución a sus problemas.

Respecto a los matemáticos, propiamente dichos, los trabajos referentes al Álgebra Lineal se desprenden de su área de interés. Por ejemplo, lo que se expone en los Elementos de Euclides, desarrolló dos teorías abstractas que tienen que ver con el Álgebra Lineal: por un lado, las magnitudes[1] (Libro V; cf, p. 191) y por otro lado la de los enteros[2] Bourbaki (1969).

Respecto a las ecuaciones de primer grado, los babilónicos ya podían resolver de manera sofisticada un sistema de ecuaciones de primer grado, es más, la manera de dar solución se asemejan al álgebra elemental de nuestros tiempos, por ejemplo, para resolver un sistema lineal $bx = c$, donde solo se tenga una incógnita, basta con conocer las reglas expuestas por Diofanto que consisten en pasar los términos de un lado a otro, combinar los términos semejantes (Bourbaki, 1969). Además, algebristas babilónicos ya conocían la forma de resolver ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas como $xy = 600$ y ecuaciones simultáneas de segundo grado como $(ax + by)^2 + cx + dy = e$, para 55 grupos de valores numéricos especiales de a, b, c, d, e, conduciendo cada grupo de valores a una ecuación de segundo grado en x, esto por medio de sus tablas numéricas extensas (Bell, 2002).

Podríamos concluir que el origen del Álgebra Lineal subyace como necesidad primordial a la solución de problemas matemáticos que se pueden representar con ecuaciones o sistema de ecuaciones lineales. La historia da evidencia que los trabajos siguientes: Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático, trabajos de los babilónicos, Papiro Rhind se encuentran los primeros indicios de la aparición del Álgebra Lineal, siendo el Papiro Rhind uno de los trabajos más antiguos, encontrados al momento.

[1] Euclidis Elementa, 5 vol., ed. J. L Heiberg, Lipsiae (teubner), 1883-88)
[2] Euclidis Elementa, 5 vol., ed. Libro VII, J. L Heiberg, Lipsiae (teubner), 1883-88)

1.2 Enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal

De acuerdo con Siap (2008), el Álgebra Lineal se puede considerar como el primer curso con un alto nivel de abstracción en carreras como: matemáticas, ingeniería y otras ciencias. Los conceptos que se estudian en este curso son abstractos (Salgado & Trigueros, 2014), no obstante, el Álgebra Lineal es potencialmente útil para los estudiantes universitarios en las carreras mencionadas debido a sus aplicaciones (Carlson et al., 1993). Como señala Dorier et al. (2000), al presentar por primera vez los conceptos de Álgebra Lineal a los estudiantes, ellos tienen la sensación que aterrizan en un nuevo planeta en el cual no logran ubicarse "Es bastante claro que muchos estudiantes tienen la sensación de haber descendido en un nuevo planeta y no son capaces de encontrar su camino en este nuevo mundo" (Dorier et al., 2000, p. 86).

Por otro lado, se había analizado cuestiones referentes a la naturaleza epistemológica del Álgebra Lineal donde Dorier et al. (2000) mencionan que diseños didácticos y uso de tipos de lenguajes son fuentes de obstáculos en el aprendizaje. Por su parte, Dorier et al. (2000) revelan en el Álgebra Lineal un obstáculo que podría aparecer en los estudiantes el cual llama el obstáculo del formalismo, dicho obstáculo se manifiesta como dificultad asociada con el lenguaje del Álgebra Lineal. Una de las causas de dicho obstáculo se asocia con malas manipulaciones de la teoría de conjuntos (Dorier et al., 2000), por ejemplo en la pregunta: "1. Verdadero o falso (justifica tu respuesta): v y u son dos transformaciones lineales de un espacio vectorial sobre sí mismo: $v \circ u = 0 \Leftrightarrow Im(u) = Ker(v)$" y la respuesta "Falso, porque $v \circ u = 0 \Rightarrow Im(u) \in Ker(v)$ y no $Im(u) = Ker(v)$" tomadas de Dorier et al. (2000), en la respuesta anterior se trata al conjunto $Im(u)$ como un elemento.

De acuerdo con Hillel (2000) en un curso típico de Álgebra Lineal, la presentación de los objetos y operaciones básicas se realiza mediante modos de descripción:

> El *modo de descripción abstracto*: Uso del lenguaje de la teoría formal de los espacios vectoriales, esto incluye: espacios vectoriales, subespacios, dimensión, kernel, etc.
>
> El *modo de descripción aritmético*: Usando el lenguaje y los conceptos de manera más específica sobre $\mathbb{R}^n$, es decir: n-tuplas, matrices, rango, soluciones de sistemas de ecuaciones, etc.
>
> El *modo de descripción geométrico*: uso del lenguaje y conceptos sobre los espacios de dos y tres dimensiones, esto incluye: segmentos dirigidos, puntos, líneas, planos y transformaciones geométricas. (p. 192)

Además, Hillel (2000) menciona que esos tres modos de descripción son intercambiables pero que esto no implica su equivalencia (no son iguales). Respecto a estos modos de descripción encontró en sus investigaciones que los maestros no hacen pausas ni advierten del cambio entre uno y otro a los estudiantes. Se dio cuenta de esto mientras grababa cursos de Álgebra Lineal, adicionalmente al utilizar el modo de descripción geométrico no queda claro el objetivo de su uso, es decir, si se utiliza como un caso particular o si lo utilizan como algo heurístico para el caso en general.

Respecto a la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal se considera universalmente como una experiencia frustrante para maestros y alumnos (Hillel & Sierspinska, 1994; Hillel, 2000). Además, existe la creencia de que es la "naturaleza de la bestia", expresión usada por Hillel, y que no hay mucho que hacer para que esto sea diferente. Afirma Stewart y Thomas (2009) que a pesar de todos los esfuerzos que se han hecho para mejorar esta situación, el aprendizaje por parte de los estudiantes sigue siendo un gran reto.

Algunas investigaciones reportan que en la mayoría de las universidades en los cursos de Álgebra Lineal no se alcanza el nivel de aprendizaje esperado Harel (1989a), Harel (1989b), Sierpinska et al. (1999), y Sierpinska (2000) citados en Trigueros et al. (2015). Otras reportan que los profesores y estudiantes consideran los temas de Álgebra Lineal difíciles: Sierpinska (2000); Possani et al. (2010); Salgado y Trigueros (2015); Harel (2017). Asimismo, existe aceptación en que es difícil alcanzar los objetivos de enseñanza y aprendizaje para los cursos de Álgebra Lineal (Robinet 1986, Harel 1989a, Dorier 1990, Moore 1995, Sierpinska 2000, Weller et al. 2002 y Maracci 2008 citados en Parraguez et al., 2016).

Otro factor que influye en que no se alcancen los aprendizajes esperados, es el tiempo que tarda un curso de Álgebra Lineal y las múltiples definiciones. Ambos factores hacen que los temas anteriores se olviden por los estudiantes. Por ejemplo, en una entrevista a profesores en formación del CITEC (México) para ser ingenieros realizada por Siero y Romo (2015), mencionan que el profesor que imparte la materia de materiales compuestos y diseño de estructuras de aeronaves, señaló que los estudiantes no recuerdan cómo hacer operaciones básicas con matrices. Además, pone en manifiesto lo siguiente:

> Uno de los contratiempos en las materias es que se tiene que volver a explicar cómo multiplicar dos matrices. Esto significa tiempo de clase, recordando álgebra matricial en lugar de trabajar en los temas propios de la materia, como es el caso de los alumnos de tronco común de ingeniería del CITEC. (Discurso del profesor A). (Siero & Romo, 2015, p.13)

Es decir, el profesor que imparte aplicaciones del Álgebra Lineal exhibe que los estudiantes olvidan cosas básicas del Álgebra Lineal y que el recordatorio del álgebra matricial es un contra tiempo para los cursos en el caso del CITEC.

Además, de acuerdo con Dogan (2018) las investigaciones que han sido publicadas con respecto del Álgebra Lineal, se analizan las dificultades respecto a conceptos básicos y los resultados sugieren lo siguiente: 1) las dificultades son asociadas con el nivel de abstracción de los conceptos del Álgebra Lineal; 2) el formalismo en el Álgebra Lineal parece hacer que los estudiantes sientan una falta de relación entre lo que ya saben de matemáticas; 3) el enfoque axiomático del Álgebra Lineal parece dar a muchos estudiantes la sensación de aprender temas que no son necesarios para sus especialidades.

Se identifica una problemática la cual radica en el aprendizaje débil de los estudiantes respecto a la asignatura del Álgebra Lineal. Al respecto de esta problemática en el año 2012 se creó un grupo de discusión organizado por el comité de educación de la Sociedad Internacional de Álgebra Lineal (ILAS) en el evento ICME, con el fin de discutir temas relevantes acerca de: la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal incluyendo: la motivación; problemas desafiantes; la visualización; la tecnología (Berman & Okubo, 2012). Entre las intervenciones se habló de la importancia de motivar el aprendizaje del Álgebra Lineal por cuestiones de la vida real, entre los ejemplos mencionados son: Page Rank de Google; métodos de detección de bordes; redes neuronales; los problemas en teoría de grafos; propiedades de la sucesión de Fibonacci (Berman & Okubo, 2012). Expertos en Álgebra Lineal sugieren enfrentar una parte del problema de aprendizaje a través de la motivación por medio de las aplicaciones del Álgebra Lineal en la vida cotidiana de los estudiantes. Entre los conceptos claves y con diversas aplicaciones dentro y fuera de la matemática es el de los operadores lineales diagonalizables. En la siguiente sección se expondrá la importancia de ellos.

1.3 Investigación acerca de los operadores lineales diagonalizables

Particularmente, con respecto a los operadores lineales diagonalizables (OLD) los cuales están definidos sobre un espacio vectorial de dimensión finita, de acuerdo con la experiencia de algunos profesores que han impartido cursos de Álgebra Lineal, se considera como un concepto objetivo de enseñanza en el sentido de consolidar conocimientos en el estudiante al operar con una representación sencilla de la transformación lineal, es más, mencionan que, se prepara al estudiante para que trabaje con conjuntos, se dota de estructura a esos conjuntos, se establecen funciones especiales que preservan estructura (transformaciones lineales) entre esos conjuntos, posteriormente se enseña que las transformaciones lineales entre espacios de dimensión finita tienen una representación matricial y finalmente, se muestra que algunos operadores lineales (transformaciones lineales particulares) tienen una representación "sencilla" y que algunas veces esto se logra con la elección de una "buena base".

Uno se podría preguntar ¿Qué significa que un operador lineal tenga una representación sencilla? ¿Qué significa la expresión de una buena base? Para responder la primera pregunta se consideran las diferentes representaciones matriciales que tiene el operador lineal respecto a alguna base, lo ideal sería escoger aquella que contenga la mayor cantidad de ceros en las entradas de la matriz de representación, dado que, esto facilitaría los cálculos y podría hacer más factible el entendimiento de cómo actúa el operador lineal sobre el espacio vectorial en el cual se ha definido. Para responder la segunda pregunta, se considera que la representación matricial del operador lineal respecto a alguna base en ocasiones tiene muchos ceros como entradas, y precisamente la base que logre esto nos referimos a ella como buena base.

La importancia de diagonalizar a los operadores lineales, cuando es posible, es porque simplifica significativamente los cálculos al tener una representación matricial y sencilla, y esto produce un mejor entendimiento de cómo actúa un operador lineal sobre el espacio vectorial en el cual se ha definido. Entendiendo por diagonalizar al operador lineal en el sentido de Lang (1987), es decir, sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y sea $O: V \rightarrow V$ un operador lineal. Se dice que una base B de V diagonaliza a O si la matriz asociada con O relativa B es una matriz diagonal.

Respecto a la representación matricial de los operadores lineales y trasladarse entre las representaciones Hillel y Sierpinska (1994) mencionan que esto es difícil para los estudiantes. Entre las representaciones se puede encontrar una representación del operador lineal sencilla, pero para lograrlo el estudiante tiene que comprender diferentes relaciones entre conceptos que resultan complejas. Por ejemplo, mencionan Stewart y Thomas (2009) que los estudiantes tienen dificultad para comprender el proceso de lado izquierdo (producto, a la izquierda, de una matriz por vector) y el proceso lado derecho (producto de escalar por vector) de la igualdad $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ dado que son procesos distintos y tienen que ser equivalentes los objetos resultantes. Además, mencionan que en el caso de la ecuación $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})x = 0$ los estudiantes no comprenden de donde sale $\boldsymbol{I}$ y a qué identidad se refiere.

En la búsqueda de esa representación sencilla de los operadores lineales se involucra una situación matemática y específica en la que intervienen diferentes conceptos y el dominio de cada concepto. Esta situación matemática y particular de manera natural envuelve o integra diferentes conceptos, por ejemplo, el problema puede plantearse de dos maneras: 1) encontrar (si existe) una base cuyos vectores sean todos vectores propios del operador lineal; 2) determinar si la representación matricial del operador lineal dado es semejante a una matriz diagonal. En la primera situación, se debe saber lo que es una base y entender la igualdad $O(x) = \lambda x$ con $x \neq 0$. En la segunda situación, se debe tener claro la ecuación $([O]_B - \lambda \boldsymbol{I})x = 0$ con $x \neq 0$ en donde $[O]_B$ simboliza la representación matricial del operador lineal relativa a una base.

Estas dos perspectivas de plantear el problema de buscar una representación sencilla de un operador lineal, convergen con la enseñanza tradicional de un procedimiento memorizado por los estudiantes donde en algunos casos se tiene éxito. En otros casos este procedimiento es olvidado por los estudiantes al paso del tiempo por la forma artificial en el cual fue aprendido.

Además, la manera de decidir si un operador lineal O, se puede diagonalizar no solo involucra la relación $O(x) = \lambda x$ con $x \neq 0$, sino también involucra diferentes conceptos y relaciones prácticas o teóricas. Por ejemplo, en lo práctico, calcular un determinante o determinar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, y en lo teórico, el análisis de los espacios generados por los valores propios. Así mismo, este procedimiento que involucra diversos conceptos y sus relaciones, resulta complicado para los estudiantes por la misma complejidad que presentan los conceptos inherentes, entre los cuales están: base, transformación lineal, matriz asociada a una transformación lineal, polinomio característico, valor y vector propio y espacio propio. Por ejemplo, sobre el tema de valores y vectores propios, de acuerdo con Salgado y Trigueros (2014), es considerado por alumnos como un tema difícil. Mientras que hay otros conceptos involucrados en el cual es escasa la investigación, por ejemplo el caso de los espacios propios (Wawro et al., 2019).

Por otro lado, hay avances significativos respecto a los conceptos que están involucrados en los operadores lineales diagonalizables, por ejemplo, en la búsqueda de los vectores propios Salgado y Trigueros (2015) investigaron una experiencia de enseñanza en el aula sobre ese concepto a partir del problema de la modelación usando el modelo y los modelados propuesto por Lesh y Doerr (2003). En sus resultados validan las construcciones previas propuestas en su descomposición genética preliminar para el aprendizaje de los valores propios, vectores propios y espacios propios. Otro de sus resultados fue que a partir del experimento de enseñanza al menos 3 de 30 estudiantes desarrollaron una comprensión del valor y vector propio en un nivel de objeto, mientras que la mayoría del resto de los participantes dio evidencia de un mejor nivel que los grupos anteriores con un entendimiento a nivel proceso.

Otro avance de investigación de conceptos relacionados con los operadores lineales diagonalizables es la aportación de Wawro et al. (2019) quién estudió los espacios propios, centrándose en cómo razonan los estudiantes sobre combinaciones lineales de vectores propios. En sus recomendaciones advierten no hacer énfasis excesivo en encontrar bases para los espacios propios antes de que los estudiantes hayan desarrollado una comprensión sólida de los vectores y valores propios porque podría llevarlos a pensar dos ideas erróneas: 1) que los vectores propios siempre forman un conjunto linealmente independientes; 2) que sólo hay un vector propio para cada valor propio.

Por su parte, Altieri y Schirmer (2019) exponen un estudio donde observaron mediante un estudio comparativo entre la Teoría APOE y los mundos matemáticos de Tall si hay diferencias significativas en la construcción de conceptos de la *Eigen Theory*. En su estudio investigaron las construcciones de conceptos correlacionados con las trayectorias educativas de 36 estudiantes que cubrieron el programa completo de un curso de matemáticas del primer semestre de estudiantes de ingeniería de primer año. Muestran en sus resultados que a pesar de observar diferencias significativas en el procedimiento los resultados indican que el tipo de escuela anterior al curso no afecta la construcción de los conceptos entre los estudiantes que lograron completar el programa del curso.

En particular, con respecto a diagonalizar una matriz, Yildiz (2013) reporta que al seguir una serie de pasos se comenten errores de cálculo, aumentando la probabilidad de error si el tamaño de la matriz aumenta, asimismo, menciona que la parte crucial es decidir si la matriz es diagonalizable o no, lo cual requiere de conocimientos de la teoría de la diagonalización.

Por otro lado, los operadores lineales diagonalizables, en un principio, son transformaciones lineales, por ello reportamos a continuación algunos estudios desde el enfoque de la teoría APOE concernientes a estos. Por ejemplo, Roa-Fuentes y Oktaç (2010), proponen dos caminos cognitivos para la construcción de las transformaciones lineales, el primero por medio del mecanismo coordinación de procesos y el segundo por el de interiorización de acciones. Para la coordinación de procesos, consideran la desencapsulación del objeto transformación como un elemento del esquema de función, de tal forma que se externe el proceso que lo generó, es decir, una función definida entre espacios vectoriales, que al coordinarse con el proceso de operación binaria genera un nuevo proceso que indica al estudiante la preservación de una operación. En el camino de interiorización de acciones, el individuo las realiza sobre vectores particulares de un espacio vectorial y los transforma bajo una función dada. Ambos caminos resaltan la importancia de los espacios vectoriales y del concepto función en la construcción de una transformación lineal.

Posteriormente, Trigueros et al. (2015) investigaron las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la matriz asociada a una transformación lineal, concretamente estos autores mostraron las dificultades que tuvieron tres estudiantes para hacer dicha construcción como objeto, sin embargo, reconocen el papel determinante que juega considerar a la transformación lineal como una función en la comprensión profunda del Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En sus conclusiones, destacan la construcción del concepto vector de coordenadas como objeto. Además, la coordinación entre un vector respecto a una base del espacio dominio de la transformación lineal como proceso con la idea de matriz asociada a la transformación lineal como proceso, para obtener como resultado las imágenes mediante la transformación lineal.

Además, con respecto al estudio de las transformaciones lineales desde una perspectiva matricial, Andrews-Larson et al. (2017) reportan una trayectoria de aprendizaje hipotética con el objetivo de desarrollar un razonamiento flexible respecto a las matrices como transformaciones lineales por medio de tareas donde los estudiantes trabajan para generar, componer e invertir matrices que corresponden a trasformaciones geométricas. Estas investigaciones contribuyen al estudio de las transformaciones lineales desde una perspectiva matricial.

Acerca de los niveles intra-, inter- y trans- del esquema del concepto transformación lineal, González y Roa-Fuentes (2017) hicieron un análisis teórico considerando las relaciones con respecto a la base, se enfocaron en la importancia de la representación funcional, matricial, geométrica (cuando eso sea posible), y buscaron a partir de acciones concretas mejorar la comprensión sobre el concepto transformación lineal usando como conector el concepto de base ordenada. Además, analizaron cómo se relaciona la definición funcional con la representación matricial y geométrica por medio de la base ordenada. En consecuencia, proponen una caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de transformación lineal.

En resumen, con respecto a lo que reporta la literatura especializada se encuentra la investigación de Yildiz (2013) donde propone estrategias pedagógicas con el uso de tecnología para mejorar la comprensión de la diagonalización de una matriz. Las investigaciones de Roa-Fuentes y Oktaç (2010), González y Roa-Fuentes (2017) y Trigueros et al. (2015) se enfocan en las transformaciones lineales, no atienden la integración ni las relaciones de los conceptos que están involucrados en las transformaciones lineales que se pueden diagonalizar.

Además, existen acercamientos de investigaciones como las de Wawro et al., 2019, Altieri y Schirmer (2019) quienes centran su atención en los valores y vectores propios y estos son conceptos íntimamente ligados a los operadores lineales diagonalizables. Luego, al momento de la revisión no se encontró con un estudio acerca de la comprensión de los operadores lineales diagonalizables como foco principal desde la perspectiva de APOE y desde otras perspectivas. En consecuencia, se realizó un estudio acerca de los operadores lineales diagonalizables desde el enfoque de la teoría APOE.

Por otro lado, en el apartado siguiente se presenta la pregunta y objetivo de investigación.

1.4 Pregunta y objetivo de investigación

A continuación, enunciaremos la pregunta y el objetivo de la investigación.

Pregunta de investigación

¿Cómo comprenden los estudiantes de nivel superior el concepto de operadores lineales diagonalizables desde la perspectiva APOE?

Para responder esta pregunta, analizaremos la comprensión del concepto matemático de estudio mediante un modelo cognitivo que describa la construcción del concepto como un objeto cognitivo. Además, analizaremos qué actividad matemática se involucra en decidir si un operador lineal es diagonalizable, es decir, mediante el desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables. Por lo tanto, se plantean las preguntas auxiliares siguientes:

- ¿Qué estructuras y mecanismos mentales están asociados a los operadores lineales diagonalizables en estudiantes de nivel superior?
- ¿Qué relaciones establecen los estudiantes de nivel superior en matemáticas entre elementos matemáticos involucrados a los operadores lineales en la decisión de si son diagonalizables?

Objetivo general

Identificar y caracterizar la comprensión de estudiantes de matemáticas de nivel superior respecto a los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría APOE.

Para lograr dicho objetivo general realizaremos los objetivos específicos siguientes:

- Realizar una descomposición genética de los operadores lineales diagonalizables.

- Describir y caracterizar las relaciones que establecen los estudiantes respecto al concepto operador lineal diagonalizable con otros conceptos del Álgebra Lineal por medio de los niveles de comprensión intra-, inter-, trans-, del esquema operadores lineales diagonalizables.
- Proponer sugerencias didácticas relacionadas con el aprendizaje de los operadores lineales diagonalizables.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo se encuentra estructurado en una sección dividida en tres subsecciones. En la sección se expone el marco teórico que se utiliza en la investigación y se especifican los fundamentos de la teoría APOE. En la primera subsección, se explican las clases de abstracción reflexiva que se utilizan en la teoría APOE. En la segunda subsección, se detallan las estructuras mentales que se utilizan en la teoría APOE. Además, se describe la estructura esquema y se declaró como fue considerada en la investigación. En la tercera subsección, se muestra la comprensión de conceptos matemáticos desde el punto de vista de APOE.

2.1 Teoría APOE

La teoría APOE es una teoría cognitiva la cual tiene fundamentos en la *abstracción reflexiva* de Piaget, la cual es considerada como el mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático. Dicho mecanismo consta de dos partes: 1) conocimiento sobre un objeto matemático y las operaciones que actúan sobre dicho objeto, desde un nivel de cognición inferior a uno superior de operaciones (de acciones a procesos y de procesos a objetos) y, 2) reorganización y reconstrucción del objeto y de las operaciones que actúan en él, en una etapa superior que da como resultado contenido al cual se le pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al., 2014; Badillo et al., 2015).

En otras palabras, la teoría cognitiva APOE se basa en el supuesto del *conocimiento matemático* y su desarrollo en un individuo por medio de la abstracción reflexiva:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos

> y organizando esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas. (Dubinsky, 1996, pp. 32-33).

Entonces dicha postura teórica sobre el conocimiento matemático enfatiza en la habilidad para reorganizar conocimiento y construir o reconstruir estructuras mentales, mediante la abstracción reflexiva. Las estructuras mentales también llamadas construcciones mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas, se reestructuran y se adaptan para dar solución a problemas matemáticos. El *contexto social* se refiere al trabajo en grupo, dado que, de acuerdo con Arnon et al. (2014) hay más probabilidades de dar lugar a preguntas explícitas, dudas y explicaciones por estudiantes que en un contexto individual.

Respecto a una estructura mental y un mecanismo mental diremos que:

> Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina. Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos. (Stenger et al., 2008, p. 98)

2.1.1 Clases de abstracción reflexiva

La teoría APOE considera diferentes tipos de abstracción reflexiva que usualmente se les llama mecanismos mentales. Los tipos de abstracción reflexiva que propone la teoría APOE son los siguientes: interiorización, coordinación, reversión, encapsulación, desencapsulación, tematización y generalización (Arnon et al., 2014). Con fundamento en

Arnon et al. (2014), Dubinsky (2001) y Dubinsky et al. (2005a) se da una descripción detallada de los mecanismos mentales:

> *Interiorización*: cuando acciones se repiten y se reflexiona sobre ellas, el individuo pasa de depender de señales externas a tener el control interno sobre estás. Este se caracteriza por una capacidad de imaginar la realización de los pasos sin tener necesariamente llevar a cabo cada una de forma explícita y puede ser capaz de saltar los pasos, así como invertirlos. (p. 20)
>
> *Coordinación*: el mecanismo de coordinación es indispensable en la construcción de algunos Objetos. Dos Objetos pueden ser des-encapsulados, sus Procesos coordinados, y el Proceso coordinado encapsulado para formar un nuevo Objeto. (p. 23).
>
> *Reversión*: Una vez que un proceso existe internamente, es posible que el sujeto lo piense a la inversa, no necesariamente en el sentido de deshacerlo, sino como medio de construir un nuevo proceso que consiste en invertir el proceso original. Piaget no habló de esto en el contexto de la abstracción reflexiva, sino en términos del grupo INRC. Lo incluimos como una forma adicional de construcción. (Dubinsky, 1991, p. 101)
>
> *Encapsulación*: si uno se da cuenta del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad, y realmente puede construir tales transformaciones (explícita o en la imaginación de uno), entonces se dice que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Para el concepto de función, encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones tales como

> la formación de un conjunto de funciones, definir las operaciones aritméticas sobre dicho conjunto, dotándola de una topología, etc. (p. 339)
>
> *Desencapsulación*: una vez que el proceso se ha encapsulado en un objeto mental, puede ser des-encapsulado, cuando surja la necesidad, de nuevo a su proceso subyacente. En otras palabras, mediante la aplicación del mecanismo des-encapsulación un individuo puede volver al proceso que dio origen al objeto. (p. 22)
>
> *Tematización*: la construcción de un esquema como un objeto mental se logra a través del mecanismo de tematización. Este mecanismo permite a un individuo aplicar transformaciones a la estructura del esquema. (p. 25)

Advertimos aquí, que en lo sucesivo cuando se escriba la palabra mecanismo se refiere a un mecanismo mental.

Por otro lado, estos tipos de abstracción reflexiva tienen la función de relacionar en un momento preciso las estructuras mentales. Transitar de una estructura mental a otra o revertir la estructura si el individuo lo considera conveniente. La importancia de estos mecanismos mentales es fundamental, proporciona las pautas para que un individuo construya su propio conocimiento. Menciona Mendoza-Sandoval et al. (2015); Mendoza-Sandoval (2015), cada individuo es responsable de que estos mecanismos mentales tengan éxito o no, puesto que una forma de describir y establecer conexiones con las estructuras mentales depende de su conocimiento matemático.

2.1.2 Estructuras mentales

Las estructuras mentales o construcciones mentales que se proponen en la teoría APOE son entendidas como todas las transformaciones que realizan los individuos para resolver determinadas tareas y que pueden adquirir significado de ellas. Dichas construcciones mentales pueden manifestarse como reconstrucciones exactas (correspondiente a la memoria y a la repetición de métodos, algoritmos previamente conocidos) o adaptaciones de un conocimiento previo, esta última es de importancia puesto que intervienen directamente con el desarrollo del conocimiento matemático (Aldana, 2011). Advertimos aquí, que en lo sucesivo cuando se escriba la palabra estructura o construcción se refiere a una estructura mental.

Las estructuras mentales que proponen en la teoría APOE son: acción, proceso, objeto y esquema (Arnon et al., 2014). Se describen las estructuras acción, proceso y objeto con fundamento en Arnon et al. (2014). La estructura mental esquema la discutimos en la sección siguiente.

> *Acción*. Según Piaget y adoptado por la teoría APOE, un concepto es concebido primero como una acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un objeto, u objetos previamente concebida. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse de forma explícita y guiada por instrucciones externas; adicionalmente, cada paso debe introducir al siguiente, es decir, los pasos de la acción no pueden todavía ser imaginados y ninguno se puede saltar. (Arnon et al., 2014, p.19).

En Álgebra Lineal, ejemplo de una estructura acción de una n-tupla, es considerar a la n-tupla como cantidad determinada de números y colocarlos con un orden particular (Arnon et al., 2014); Mendoza-Sandoval (2015) para la matriz de cambio de base (MCB), un individuo con una concepción acción, es capaz de calcular una MCB para espacios euclidianos.

A partir de la repetición de las acciones, se reflexiona sobre ellas, un individuo puede tener control sobre estas y dejar de necesitar de sugerencias (señales) externas, es decir que se pueden ejecutar dichas acciones ya sea externamente o internamente, es más, se puede omitir pasos o revertir si se considera necesario. La interiorización hace posible esto. Cuando esto sucede se dice que un individuo tiene una concepción proceso Arnon et al. (2014). De acuerdo con Dubinsky et al. (2005a) hacen un esfuerzo para dar la descripción de lo que es un proceso e interpreta el caso para las funciones de la manera siguiente:

> *Proceso*. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que lleva a cabo la misma operación acción que se interioriza, pero totalmente en la mente del individuo, lo que le permite imaginar que realiza la transformación sin tener que ejecutar cada paso explícitamente. Así, por ejemplo, un individuo con una comprensión proceso de la función construirá un proceso mental para una función determinada y pensará en términos de entradas, posiblemente no especificadas, y las transformaciones de esas entradas para producir salidas (p. 339).

La diferencia entre una construcción acción y un proceso radica en el siguiente sentido: una acción se debe hacer la transformación (ya sea física o mental); para un proceso se puede llevar a cabo dicha trasformación sin la necesidad de ir paso a paso (Arnon et al. 2014). Por ejemplo, para el caso del Álgebra Lineal, la construcción de una n-tupla si las acciones están interiorizadas en un proceso, el sujeto puede construir mentalmente una n-tupla aun cuando no se le especifique n; puede ser capaz de construir n-tuplas, sin importar el espacio vectorial y su dimensión (Arnon et al., 2014); Mendoza-

Sandoval (2015) para la MCB considera que un individuo en esta estructura es capaz de trabajar sobre cualquier espacio vectorial V de dimensión finita y no sólo en $\mathbb{R}^n$, para determinar una matriz de cambio de base.

La siguiente estructura ocurre cuando un individuo tiene la necesidad de aplicar una acción a un proceso, es decir, se ve en la necesidad de pensar en algo estático y no en algo dinámico. Esto se logra a través del mecanismo encapsulación, al respecto del objeto Dubinsky menciona lo siguiente:

> *Objeto*. Si uno se da cuenta del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad, y realmente puede construir tales transformaciones (explícita o en la imaginación de uno), entonces se dice que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones tales como la formación de un conjunto de funciones, definir las operaciones aritméticas sobre dicho conjunto, dotándola de una topología, etc. (Dubinsky et al., 2005, p. 339).

Por ejemplo, si se comparan *n*-tuplas o se realizan operaciones binarias, serán acciones sobre *n*-tuplas, dichas acciones deben de aplicarse con éxito y el proceso de formación de una *n*-tupla será encapsulado en un objeto Arnon et al. (2014). Para la MCB cuando el individuo enfrenta situaciones en donde necesite aplicar acciones sobre la MCB, por ejemplo, utilizar a la MCB para obtener el vector de coordenadas respecto a otra base Mendoza-Sandoval (2015).

De acuerdo con Trigueros (2005) la construcción del conocimiento pasa por tres etapas principales: acción, proceso y objeto. Y que el paso por estas etapas no necesariamente es secuencial. Además, señala que un individuo puede permanecer en etapas intermedias e incluso tener una etapa de construcción diferente para distintos conceptos.

2.1.2.1 La estructura esquema

En relación con la estructura *esquema*, la teoría APOE la define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se relacionan consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que podría utilizar para resolver una situación problemática y específica que involucra esa área determinada de las matemáticas. Además, la *coherencia* está determinada cuando un individuo reconoce las relaciones que están incluidas en el esquema y se tiene una forma para decidir cuándo se puede utilizar con éxito esta estructura para resolver un problema (Trigueros 2005; Oktaç et al., 2019).

Los esquemas se caracterizan por el dinamismo y la continua reconstrucción, además son determinados por la actividad matemática en una situación específica, es decir, en un problema matemático y específico, un individuo evoca un esquema para tratar de darle solución estableciendo relaciones entre los conceptos que dispone en ese momento, y los individuos en la misma situación, utilizan los mismos conceptos involucrados pero pueden llegar a establecer diferentes relaciones y esto es derivado por su conocimiento matemático (Arnon et al., 2014). Además, en sintonía con Arnon et al. (2014) un esquema puede incluir un concepto en diferentes situaciones o puede incluir diferentes conceptos interrelacionados.

Para el estudio de la estructura esquema se utilizan los niveles de desarrollo intra-, inter- y trans-, los cuales se distinguen por la complejidad de conocimiento matemático construido en cada nivel (Piaget & García, 2004). Para transitar de un nivel a otro, se deben desarrollar relaciones entre los constructos dentro del esquema (Arnon et al., 2014). De acuerdo con Dubinsky y McDonald (2001) los niveles se caracterizan respectivamente por: un enfoque en acciones, procesos y objetos individuales aislados de otros elementos cognitivos de naturaleza similar; la construcción de relaciones y transformaciones entre las estructuras cognitivas que componen el esquema donde un individuo, puede comenzar a agrupar elementos e incluso llamarlos con el mismo nombre; la construcción de una estructura subyacente implícita o explícita a través de la cual se comprenden las relaciones desarrolladas en la etapa inter- y mediante las cuales el esquema logra coherencia que se indica por la capacidad del individuo de determinar lo que está en el alcance del esquema y lo que no.

Así, desde la perspectiva de la teoría APOE y en sintonía con Piaget y García (2004), consideran el desarrollo del esquema mediante la triada: intra-, inter-, trans-, y la progresión de estos niveles está implicada en la transición de un nivel al siguiente a través del desarrollo de relaciones y transformaciones que un individuo hace entre los constructos particulares dentro el esquema:

> Nivel-*intra*: se caracteriza por un enfoque en acciones, procesos y objetos individuales aislados de otros elementos cognitivos de naturaleza similar. (Dubinsky y McDonald 2001, p. 7)
>
> Nivel-*inter*: se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre las estructuras cognitivas que componen el esquema donde un individuo puede comenzar a agrupar elementos e incluso llamarlos con el mismo nombre. (Dubinsky y McDonald 2001, p. 8)

> Nivel-*trans*: el individuo construye una estructura subyacente implícita o explícita a través de la cual se entienden las relaciones desarrolladas en el nivel-inter y mediante las cuales el esquema logra coherencia que se indica por la capacidad del individuo de determinar lo que está en el alcance del esquema y qué no. (Dubinsky y McDonald 2001, p. 8).

Para esta investigación consideramos al esquema como aquel que incluye diferentes conceptos interrelacionados en una situación matemática particular. Por otro lado, como los esquemas quedan determinados por la situación matemática y específica, y su desarrollo caracterizado por los niveles intra-, inter- y trans- por medio de las relaciones entre las estructuras mentales, entonces consideraremos que dos o más estructuras mentales están en una *relación* si se logra una construcción mental en la situación matemática y específica a partir de un tipo de abstracción reflexiva.

2.1.3 La comprensión de conceptos matemáticos desde APOE

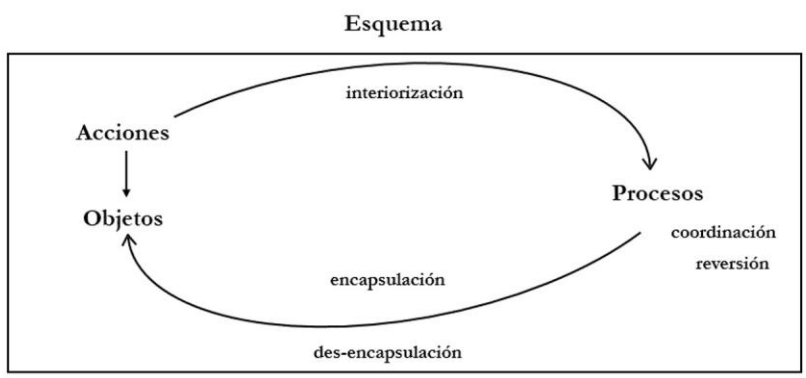
Dubinsky en la elaboración de la teoría general, identifica pequeñas porciones de conocimiento. Cuando se intenta dar descripciones y hacer explicitas las relaciones en esas pequeñas porciones de conocimiento para un concepto en particular, Dubinsky lo denomina *descomposición genética* del concepto y se define de la manera siguiente: “Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir con el fin de aprender un concepto matemático específico”. (Arnon et al., 2014, p. 27).

Los expertos en teoría APOE advierten que la descomposición genética de un concepto no es única pero este modelo cognitivo establece las relaciones entre los mecanismos mentales (clases de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión) y las construcciones o estructuras mentales (acción, proceso, objeto y esquemas).

En la Figura 2, tomada de Arnon et al. (2014, p.18) se muestran las relaciones entre las construcciones mentales que están dadas por los mecanismos mentales y de acuerdo con los autores ejemplifica cómo un individuo construye estructuras matemáticas, y que el diagrama sugiere que la construcción de conocimiento matemático es lineal, advierten que no necesariamente.

Figura 2

Construcción de Conocimiento Matemático



Nota: Adaptado de *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 10), Arnon et al., 2014, Springer.

Estas construcciones a partir de los tipos de abstracción reflexiva caracterizan la comprensión de un concepto matemático desde la perspectiva APOE de la manera siguiente:

> Consideramos que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; a continuación, las acciones se interiorizan para formar procesos que luego se encapsulan para formar objetos. Los objetos pueden ser des-encapsulados

> y volver a los procesos de los que se formaron. Por último, las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en esquemas. (Asiala et al., 1996, p. 9)

La profundidad y la complejidad de la comprensión de un individuo de un concepto dependen de él y de su capacidad para establecer conexiones y/o relaciones entre las estructuras mentales que lo constituyen. Así, la formación de conceptos matemáticos desde esta perspectiva teórica comienza a formarse cuando se aplique una transformación a objetos para obtener otros objetos como afirma Dubinsky et al. (2005).

Así, la construcción de un concepto matemático desde el enfoque teórico APOE consiste en que el individuo a partir de su concepción del concepto o las estructuras adecuadas (previas), a partir de ahí, conciba al concepto como una estructura más apropiada por medio de los tipos de abstracción reflexiva. Dicha construcción se enfoca al concepto de interés y la relación que guarda con otros conceptos, de tal modo que esos conceptos ayudan a construir una estructura del concepto más conveniente para resolver problemas. Posteriormente, se puede estudiar el desarrollo de un concepto en la mente del individuo mediante dos formas: 1) el concepto involucrado en diferentes situaciones en matemáticas; 2) el concepto interrelacionado con otros conceptos en una misma situación en matemáticas. Para estudiar estas dos formas del desarrollo de un concepto se recurre a la estructura del esquema.

Por otro lado, cuando un individuo muestre evidencia de una estructura mental de un concepto se dice que el individuo tiene una concepción acción, concepción proceso, etc., según sea el caso.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Este capítulo se encuentra estructurado en tres secciones. En la primera sección, se expone el tipo de investigación y participantes en la investigación. En la segunda sección, se describe el ciclo de investigación de la teoría APOE. En la tercera sección, se muestra el diseño metodológico de investigación.

3.1 Tipo de investigación y participantes

La investigación que se propone es de corte cualitativa, debido a que, se interpretaron atributos cognitivos para establecer los mecanismos y estructuras mentales que surgen en la construcción de los operadores lineales diagonalizables. Además, se interpretaron propiedades cognitivas para establecer los niveles de desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables a partir de la identificación de las construcciones que emergen al resolver tareas relacionadas con los OLD por medio de los mecanismos mentales.

Los participantes fueron 10 estudiantes de posgrado (25-30 años de edad) inscritos en la Universidad Autónoma de Guerrero, inscritos 2 en el programa educativo Maestría en Matemáticas Aplicadas y 8 en el de Maestría en Ciencias Matemáticas, ambos programas se ofertan en dicha Universidad. Los dos estudios de caso se justifican en que, en ambos, los estudiantes permiten externar las construcciones mentales que se ponen en juego al trabajar problemas que involucran los OLD. La selección de los casos se basó en los siguientes factores: i) que fueran estudiantes de posgrado y hubieran cursado al menos dos semestres Álgebra Lineal para tener mayor probabilidad de que sus construcciones mentales no se limiten a acciones y/o procesos; ii) accesibilidad a los investigadores y buen desempeño académico; iii) participación de forma voluntaria.

3.2 El ciclo de investigación de la Teoría APOE

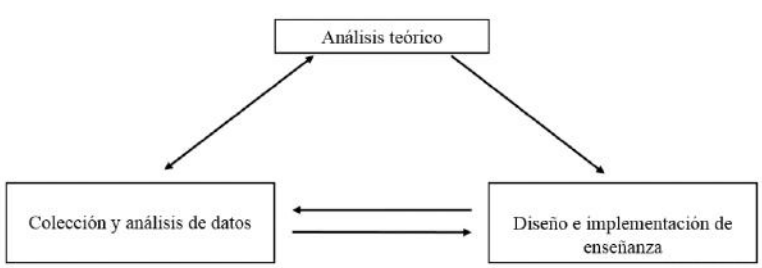
El ciclo de investigación que propone la teoría APOE considera tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y colección y análisis de datos (Arnon et al., 2014).

El ciclo de investigación propone la teoría APOE, inicia con un análisis teórico del concepto a estudiar, esto arroja una descomposición genética preliminar, en el sentido que aún no se prueba experimentalmente con el trabajo de los estudiantes. Para el segundo componente, la implementación se lleva a cabo normalmente usando el Ciclo de Enseñanza ACE, podríamos decir que esta es la parte social a la que refiere Dubinsky con respecto al conocimiento matemático reflexionando en un contexto social, dado que, en dicho ciclo, se considera la importancia del aprendizaje colaborativo, básicamente consiste en instrucciones las cuales deben apoyar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar formando grupos pequeños de discusión. El tercer componente colección y análisis de los datos es importante, dado que, sin evidencia empírica una descomposición genética sigue siendo una hipótesis (Arnon et al., 2014).

La Figura 3, ilustra la dependencia entre los componentes de investigación que propone la teoría APOE.

Figura 3

Ciclo de Investigación de la Teoría APOE



Nota: Adaptado de *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 94), Arnon et al., 2014, Springer.

3.3 Diseño metodológico de investigación

Sobre la base de una parte del ciclo de investigación que propone la teoría APOE (ver Figura 3), se realizó el diseño metodológico. Principalmente, se consideró el primer y tercer componente del ciclo de investigación que propone la teoría APOE. No se utiliza el segundo componente, se hizo el ajuste de sólo diseñar un instrumento de investigación.

A continuación se muestra el diseño metodológico:

En un primer momento, se realizó el análisis teórico y se fundamentó en tres aspectos: 1) revisión de textos: se revisaron algunos libros de texto de Álgebra Lineal, en la selección se consideró la bibliografía básica de los cursos de Álgebra Lineal para la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. 2) Revisión de artículos: se hizo el análisis de las descomposiciones genéticas de los conceptos involucrados en la definición de los operadores lineales diagonalizables y se consideró la estructura de cada concepto que podría estar involucrada en los operadores lineales diagonalizables. 3) Sugerencias de un profesor en servicio de Álgebra Lineal, las sugerencias fueron con respecto al aprendizaje y enseñanza de los operadores lineales diagonalizables.

El resultado del análisis teórico fue la una descomposición genética preliminar de los operadores lineales diagonalizables (DGPOLD), la cual considera la construcción de los operadores lineales diagonalizables como objeto cognitivo.

Además, con base en la DGPOLD y las relaciones que se expresan en la definición del concepto y los conceptos involucrados en la situación matemática: dado un operador lineal O sobre un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo K decidir si es diagonalizable, se propuso el desarrollo preliminar de los niveles del esquema de los operadores lineales diagonalizables por medio de los niveles: intra-operadores lineales diagonalizables (intra-OLD); inter-operadores lineales diagonalizables (inter-OLD); trans-operadores lineales diagonalizables (trans-OLD).

En un segundo momento, se diseñó un instrumento de investigación compuesto por un cuestionario y una entrevista semiestructurada con base en la DGPOLD y los niveles preliminares del esquema-OLD. El instrumento tiene el objetivo de estudiar el desarrollo cognitivo de los operadores lineales diagonalizables a partir de las respuestas que proporcionen los participantes de la investigación. El cuestionario tuvo el objetivo de identificar y seleccionar para una entrevista a los individuos que mostraron los conceptos involucrados con los OLD. La entrevista semiestructurada tuvo dos objetivos: 1) validar o retroalimentar las estructuras y mecanismos propuestos en la DGPOLD, para obtener la descomposición genética de los OLD; 2) validar la caracterización propuesta en el análisis teórico de los niveles de desarrollo del esquema-OLD y/o retroalimentar dichos niveles con sustento en el trabajo de los individuos seleccionados.

En un tercer momento, para la recolección y análisis de datos. Se utilizó el estudio de caso, el cual, de acuerdo con Trigueros et al. (2015) se inserta dentro del ciclo de investigación de la teoría APOE para llevar a cabo un análisis coherente del trabajo de los participantes de la investigación. Los detalles aparecen en la sección análisis de datos.

En lo sucesivo, se muestra a detalle análisis teórico y su resultado. Después, se expone el diseño y análisis del instrumento de recogida de información. A continuación, se presenta el análisis a priori del instrumento de investigación. Posteriormente, se exhibe la recolección; se dan detalles de cómo se aplicó el instrumento de investigación y se deja el análisis de datos para la sección siguiente.

3.3.1 Análisis teórico

Este análisis se fundamentó bajo dos aspectos: 1) Revisión sobre el concepto OLD en libros texto de Álgebra Lineal; 2) Revisión de artículos: descomposiciones genéticas de los conceptos involucrados en la definición de los operadores lineales diagonalizables y se consideró la estructura de cada concepto que podría estar involucrada en los operadores lineales.

Sobre el primer aspecto, los libros de texto de Álgebra Lineal que se revisaron fueron los siguientes: Álgebra Lineal (Friedberg et al., 1982, p. 233); Algebra (Godement, 1974, p. 529); Álgebra Lineal (Hoffman & Kunze, 1973, p. 183); Linear Algebra with Applications (Nicholson, 2018, p. 186); Álgebra lineal. Una introducción moderna (Poole, 2011, p. 527); Linear Algebra (Lang, 1987, p. 93); Linear Algebra Done Right (Axler, 1997, p. 88); Introducción al Álgebra Lineal (Anton, 1994, p. 263), la selección se hizo con base en la bibliografía básica de los cursos de Álgebra Lineal para la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Las categorías de análisis de los libros anteriores fueron las siguientes: definición del operador lineal diagonalizable; conceptos que involucran las definiciones de los operadores lineales diagonalizables. El papel de las definiciones del concepto de interés, así como las relacionadas con él, es formar parte de las estructuras del individuo o deben tener ideas cercanas, por eso el interés de analizar estas categorías. Además, se tuvieron diálogos recurrentes con un experto de Álgebra Lineal (profesor en servicio) sobre la enseñanza y el aprendizaje de los operadores lineales diagonalizables con el objetivo de elegir a los conceptos básicos implicados a los operadores lineales que se pueden diagonalizar.

Primero, se observó de las definiciones sobre los operadores lineales diagonalizables (Anexo 1) lo siguiente: 1) para que un operador lineal sea diagonalizable es necesario que exista una base en la cual la representación matricial del operador sea diagonal (ver definición de Lang (1987) en el Anexo 1); 2) un operador lineal es diagonalizable si existe una base donde cada vector suyo sea un vector propio (ver definición de Hoffman y Kunze (1973) en el Anexo 1); 3) una matriz $\boldsymbol{A}$ cuadrada es diagonalizable, si es similar (semejante) a una matriz diagonal, es decir, si existe una matriz $\boldsymbol{P}$ invertible tal que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ sea diagonal (ver definición de Friedberg et al. (1982) en el Anexo 1); 4) las definiciones dadas por Hoffman y Kunze (1973), y Friedberg et al. (1982) respecto con los operadores lineales diagonalizables se observó que son equivalentes, es decir, se puede analizar a los operadores lineales diagonalizables desde un punto de vista funcional o matricial, más bien, en su representación funcional se debe determinar la existencia de una base donde cada vector sea un vector propio del operador lineal dado; en su representación matricial se debe construir una matriz diagonal similar (semejante) a la matriz asociada al operador lineal (Anexo 2).

Segundo, como resultado de la revisión de los textos se identificó que los conceptos involucrados en las definiciones de los operadores lineales diagonalizables son: espacio vectorial (EV), transformación lineal (mapeo lineal, endomorfismo, operador lineal) (TL/OL), base ordenada (BO), dimensión finita (DF), campo conmutativo (CC), matriz asociada a una transformación lineal (MATL), valores propios (vP), vectores propios (VP), matriz diagonal (MD), matriz cuadrada (MC), matriz inversa (MI), matriz similar o matriz semejante (MS) y matriz diagonalizable (MDZ).

Tercero, sobre las sugerencias del experto en Álgebra Lineal, indica el dominio de los conceptos que aparecen en la definición de los operadores lineales diagonalizables aunado los conceptos siguientes: espacio propio (EP), conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales (CSSE), conjunto generador (CG), multiplicidad algebraica (MA), multiplicidad geométrica (MG), determinante (DT), polinomio característico (PC) y raíz de un polinomio (rP). De acuerdo con el experto, los conceptos anteriores pueden estar explícitamente o no en la definición de un operador lineal diagonalizable pero deben ser conceptos que domine el estudiante para lograr su aprendizaje de los operadores lineales diagonalizables.

Por lo tanto, los conceptos involucrados en la definición de los operadores lineales diagonalizables y los que sugiere el experto en Álgebra lineal son: 1) espacio vectorial (EV); 2) transformación lineal (mapeo lineal, operador lineal (OL), endomorfismo; 3) base ordenada (BO); 4) dimensión finita (DF); 5) campo conmutativo (CC); 6) matriz asociada a una transformación lineal (MATL); 7) valor propio (vP); 8) vector propio (VP); 9) matriz diagonal (MD); 10) matriz cuadrada (MC); 11) matriz inversa (MI); 12) matriz similar o matriz semejante (MS); 13) espacio propio (EP); 14) conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales (CSSE); 15) conjunto generador (CG); 16) multiplicidad algebraica (MA); 17) multiplicidad geométrica (MG); 18) determinante (DT); 19) polinomio característico (PC); 20) raíz de un polinomio (rP).

Entonces, se identificaron al menos 20 conceptos básicos en el aprendizaje de los operadores lineales diagonalizables, doce en la definición y ocho más por parte de las sugerencias del experto de Álgebra Lineal. Advertimos aquí que pueden ser más conceptos involucrados pero por lo menos los 20 conceptos identificados serían el mínimo de conceptos requeridos.

Para el segundo aspecto, se revisaron artículos de las descomposiciones genéticas de los conceptos: espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2010), transformación lineal (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010), base ordenada (Kú et al., 2008; Mendoza-Sandoval et al., 2015), matriz asociada a una transformación lineal (Montelongo, 2016), valor y vector propio (Salgado & Trigueros, 2014), conjunto solución de un sistema de ecuaciones (Trigueros et al., 2007), conjunto generador (Kú, 2012). Además, respecto a los conceptos involucrados y de los cuales no se encontró literatura relativa a su descomposición genética al momento de la revisión son: dimensión finita, matriz diagonal, matriz cuadrada, matriz inversa, matriz semejante, campo conmutativo, espacio propio, polinomio característico, multiplicidad algebraica, multiplicidad geométrica y determinante. También, sobre la base de mi experiencia en teoría APOE, se precisó el tipo de estructura que debe tener un individuo acerca de los conceptos que no se encontró su modelo cognitivo (Anexo 3).

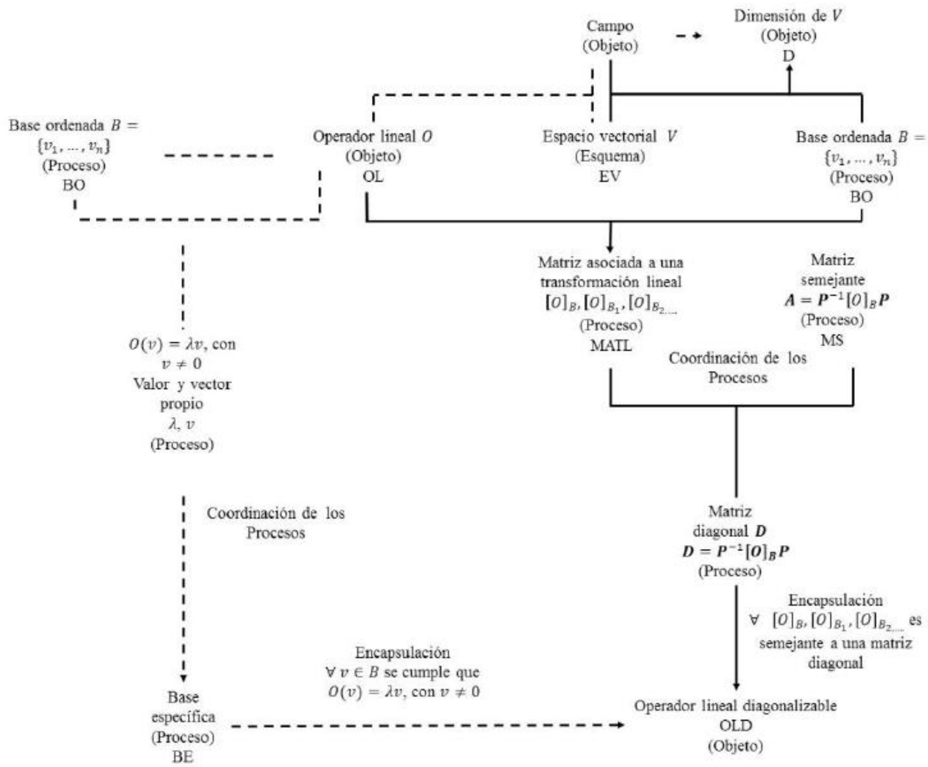
3.3.2 Modelo cognitivo preliminar de los operadores lineales diagonalizables

En la construcción de los OLD se consideró que un individuo debe construir previamente los conceptos: espacio vectorial transformación lineal; base ordenada; matriz asociada a una transformación lineal; valores y vectores propios; conjunto solución de un sistema de ecuaciones; matriz semejante. Los conceptos anteriores deben estar presentes en un individuo para lograr la construcción de los OLD y cada uno de esos conceptos se describe su estructura en el Anexo 3.

La construcción de los operadores lineales diagonalizables como un objeto cognitivo podría darse en un individuo de la manera siguiente: dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O, un individuo debe poder operar con cualquier espacio vectorial dado y con una concepción proceso de base ordenada, el individuo, encuentra una base B ordenada de V. Después, con su concepción proceso de vector propio, determina si cada vector $v_i \in B$ es un vector propio de O, con lo que concluye que O es un operador diagonalizable (se coordinan los procesos de base ordenada y vector propio en el proceso base específica) el cual se encapsula en el objeto operador lineal diagonzalible al que pueden aplicarle acciones específicas, es decir, considera que un operador lineal es diagonalizable si puede construir una base donde cada vector de la base es un vector propio del operador lineal. Por otro lado, si los $v_i \in B$ no todos son vectores propios de O entonces el individuo con su concepción proceso de matriz asociada a una transformación lineal (MATL) encuentra la representación matricial de O respecto a la base B, es decir $[O]_B$. Con su concepción proceso de matriz semejante, encuentra una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$, si existe, tal que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}[O]_B\boldsymbol{P}$ con lo que concluye que O es un operador diagonalizable (coordina el proceso MATL con el proceso de matriz semejante en el proceso matriz diagonal) el cual se encapsula en el objeto operador lineal diagonalizable al que pueden aplicarle acciones específicas (ver Figura 4).

Figura 4

Descomposición Genética Preliminar: Operadores Lineales Diagonalizables



3.3.3 Esquema de los operadores lineales diagonalizables: niveles de desarrollo preliminar

Como resultado del análisis teórico, se propone de manera preliminar los niveles de desarrollo del esquema-OLD a partir de las relaciones que pueden manifestarse en la situación matemática: dado un operador lineal en su representación funcional o matricial decidir si es diagonalizable. En la Tabla 1, se describen las relaciones posibles por medio de la triada intra-OLD, inter-OLD, trans-OLD.

Tabla 1

Esquema de los Operadores Lineales Diagonalizables Preliminar

Nivel intra-OLD	Nivel inter-OLD	Nivel trans-OLD
En este nivel los conceptos espacio vectorial (EV), base	Se caracteriza por la construcción de relaciones	Se construye una estructura implícita o

Nivel intra-OLD	Nivel inter-OLD	Nivel trans-OLD
ordenada (BO), matriz asociada a una transformación lineal (MATL), matriz semejante (MS), matriz diagonal (MD), determinante (DT), conjunto solución de un sistema de ecuaciones (CSSE), valor propio vP, vector propio (VP) se encuentran al menos como estructuras proceso. Se puede definir los conceptos operador lineal diagonalizable (OLD) y matriz diagonalizable (MDZ) o tener una idea cercana, por ejemplo, en el caso de la representación funcional se puede pensar que un operador lineal diagonalizable tiene vectores propios asociados a valores propios. En este nivel los conceptos están aislados y se pueden establecer algunas relaciones independientemente de la situación matemática específica, por ejemplo: coordinar los procesos espacio vectorial, operador	entre las estructuras cognitivas. En esta etapa un individuo tiene presente las construcciones de la MATL y PC en proceso (coordinación 1 y coordinación 2), pero ahora concretamente en la situación matemática y específica. Además, se establecen las siguientes relaciones: se coordinan los procesos PC y rP en el proceso vP, es decir, se manifiestan transformaciones para considerar las raíces del polinomio característico como los valores propios asociados al operador lineal (Coordinación 3: PC-rP → vP); se coordinan los procesos de vP, VP, CSSE, CG en el proceso EP (Coordinación 4: vP-VP-CSSE-CG → EP), es decir, se manifiestan transformaciones entre las estructuras cognitivas como determinar los VP asociados al vP, en algunos casos determinar el EP; se coordinan los procesos	explícita a través de la cual se comprenden las relaciones desarrolladas en la etapa inter-OLD. El esquema logra coherencia cuando el individuo tiene la capacidad de determinar el alcance de su esquema-OLD por medio de utilizar la multiplicidad algebraica y geométrica como criterio para diagonalizar un operador lineal; utilizar la multiplicidad algebraica y geométrica como criterio para decidir si una matriz cuadrada se puede diagonalizar. En esta etapa se considera que algunos operadores lineales tienen una representación matricial sencilla y esto depende de la elección de la base; su coherencia le

Nivel intra-OLD	Nivel inter-OLD	Nivel trans-OLD
lineal, base ordenada en el proceso matriz asociada a una transformación lineal (Coordinación 1: EV-OL-BO → MATL), es decir, determinar la representación matricial de un operador lineal respecto a una base ordenada; coordinar los procesos matriz asociada a una transformación lineal, determinante en el proceso polinomio característico (Coordinación 2: MATL-DT → PC), es decir, dado un operador lineal O determinar su polinomio característico $f_O(\lambda)$.	MG y MA por medio del proceso OLD, es decir, se consideran trasformaciones como comparar la multiplicidad geométrica con la multiplicidad algebraica como criterio de diagonalización (Coordinación 5: MA-MG → OLD); establecer la coordinación entre los procesos MATL, MS, MD, MI, por medio del proceso matriz diagonalizable (Coordinación 6: MATL-MS-MD-MI → MDZ), es decir, se consideran las transformaciones necesarias para determinar que una matriz dada es semejante a una matriz diagonal.	permite determinar si es posible diagonalizar operadores lineales en espacios vectoriales distintos a $\mathbb{R}^n$; usar los operadores lineales diagonalizables para resolver otro tipo de cuestiones, es decir, usar su representación sencilla para resolver los problemas.

A continuación, se explica el significado de la notación y simbología descrita en los niveles detallados anteriormente de las relaciones. Además, se expone cómo se podrían evidenciar dichas coordinaciones.

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n, O un operador lineal definido sobre V y B una base ordenada de V, entonces se tiene lo siguiente:

Coordinación 1: EV-OL-BO → MATL, significa que los procesos espacio vectorial, operador lineal, base ordenada se coordinan en el proceso matriz asociada a una transformación lineal. Para lograr esta coordinación, los estudiantes van a necesitar operar en los espacios vectoriales de dimensión finita propuestos, esto debe ser posible por su estructura trans-EV. Además, con su estructura proceso de operador lineal van a lograr evaluar los vectores de la base de salida en el operador lineal dado. Posteriormente, con su estructura proceso de base ordenada van a escribir las imágenes resultantes como combinación lineal de los vectores de la base de llegada. Después, se van a quedar con la información de los escalares de la combinación lineal y los van a establecer como columnas de la matriz asociada al operador lineal, es decir $[O]_B$.

Coordinación 2: MATL-DT → PC, significa que los procesos matriz asociada a una transformación lineal y determinante se coordinan en el proceso polinomio característico. Para lograr esta coordinación, los estudiantes van a necesitar operar en los espacios vectoriales de dimensión finita propuestos, esto será posible por su estructura trans-EV. Además, como son capaces establecer la coordinación 1 va a poder construir la representación matricial del operador lineal dado en la situación matemática y específica, es decir $[O]_B$. Posteriormente, con su estructura proceso de determinante van a lograr calcular el $\det([O]_B - \lambda \boldsymbol{I})$ con el objetivo de construir el polinomio característico $f_O(\lambda)$ asociado a O. Además, esta coordinación puede darse entre una matriz y el determinante de la manera siguiente: el individuo necesita trabajar en el espacio vectorial de matrices de tamaño $n \times n$, luego si tiene una matriz $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con su estructura proceso de determinante van a lograr calcular el $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ con el objetivo de construir el polinomio característico $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ asociado a $\boldsymbol{A}$.

Coordinación 3: PC-rP → vP, se coordinan los procesos polinomio característico y raíz de un polinomio en el proceso valor propio. Para lograr esta coordinación, los estudiantes van a necesitar analizar el polinomio característico $f_O(\lambda)$ y determinar sus raíces (λ) las cuales de existir se deben considerar como valores propios que cumplen la igualdad $O(x) = \lambda x$ con $x \neq 0$.

Coordinación 4: vP-VP- CSSE-CG → EP, significa que los procesos de valor propio, vector propio, conjunto solución de un sistema de ecuaciones y conjunto generador se coordinan en el proceso espacio propio. Para lograr esta coordinación, se debe tener control sobre cada raíz λ (si existen) del polinomio característico $f_O(\lambda)$ y establecer con cada una de las raíces del $f_O(\lambda)$ el sistema $([O]_B - \lambda \boldsymbol{I})x = 0$. Posteriormente, con su estructura proceso del CSSE podrán encontrar su conjunto solución y después determinar cada espacio propio asociado a cada valor propio λ, es decir E_λ.

Coordinación 5: MA-MG → OLD, significa que los procesos de multiplicidad algebraica y geométrica se coordinan en el proceso operador lineal diagonalizable. Para lograr esta coordinación, los estudiantes van a necesitar operar en los espacios vectoriales de dimensión finita propuestos y trabajar con operadores lineales O definidos sobre ellos, esto será posible por su estructura trans-EV y su estructura proceso de los operadores lineales. Además, con su estructura proceso del polinomio característico podrán determinar $f_O(\lambda)$ para posteriormente estar en condiciones de comparar el número que se repite la raíz λ del polinomio característico con el número de vectores propios linealmente independientes que se pueden generar con ese valor propio λ.

Coordinación 6: MATL-MS-MD-MI → MDZ, significa que los procesos matriz asociada a una transformación lineal, matriz similar, matriz diagonal y matriz invertible se coordinan en el proceso matriz diagonalizable. Para lograr esta coordinación, los estudiantes deberán poder trabajar sobre el espacio vectorial de matrices de tamaño $n \times n$, esto va a ser posible por su estructura trans-EV. Además, se debe tener clara la relación $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ en donde la existencia de la matriz $\boldsymbol{P}$ está sujeta a condiciones específicas y deben identificar a la matriz $\boldsymbol{A}$ como una matriz semejante a una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$, cuya matriz diagonal está compuesta por los valores propios asociados a la matriz $\boldsymbol{A}$.

La notación y significado se utilizará en algunos casos para el análisis a priori y a posteriori del instrumento de investigación, además en el análisis de datos para resumir las relaciones entre los conceptos involucrados en la situación matemática y específica.

3.3.4 Instrumento de recogida de información: diseño

Se diseñó un instrumento de investigación con sustento en dos aspectos: 1) la descomposición genética preliminar de los OLD; 2) la caracterización de los niveles de desarrollo preliminar del esquema-OLD. El instrumento de investigación se compone por un cuestionario (Anexo 4) y una entrevista semiestructurada (Anexo 5). En total se plantearon 26 preguntas, 15 en el cuestionario y 11 en la entrevista.

En el cuestionario se consideró: 1) la definición de algunos conceptos involucrados en los operadores lineales diagonalizables: espacio vectorial, base ordenada, dimensión finita, vectores propios, matriz similar o matriz semejante, espacio propio, multiplicidad algebraica, multiplicidad geométrica, operador lineal diagonalizable, matriz diagonalizable. La selección de los conceptos se hizo porque son de mayor jerarquía de los que no se pregunta, en el sentido de que involucran a los otros conceptos o están con mayor frecuencia en la definición de los operadores lineales diagonalizables; 2) la estructuras necesarias para lograr la construcción cognitiva de los operadores lineales diagonalizables, se cuestiona sobre los conceptos siguientes: espacio vectorial, base ordenada, matriz asociada a una transformación lineal, vector propio, conjunto solución de un sistema de ecuaciones, determinante. La selección de estos conceptos es validar la conjetura de que dichos conceptos deben ser conocimientos básicos en el individuo para poder construir a los operadores lineales diagonalizables.

La entrevista, se centra concretamente en los operadores lineales considerando su representación funcional y matricial. Se plantearon preguntas no triviales, las cuales no se resuelven con procedimientos mecánicos, sino que plantean que los estudiantes reflexionen sobre su proceso de resolución y están dirigidas en profundizar sobre las respuestas de los estudiantes con dos objetivos: 1) validar o retroalimentar las estructuras y mecanismos propuestos en la DGPOLD para obtener la descomposición genética de los OLD como un objeto cognitivo; 2) validar o retroalimentar las relaciones a la hora de decidir si un operador lineal se puede diagonalizar.

De acuerdo con la metodología APOE, se realizó un análisis a priori y otro a posteriori para cada pregunta del instrumento de investigación. En la subsección siguiente se presenta el análisis a priori y en la sección análisis de datos se presenta el análisis a posteriori del instrumento de recogida de información.

3.3.5 Análisis a priori del instrumento de investigación

Se presenta el análisis a priori del instrumento de investigación, es decir, en cada problema del instrumento de investigación se da una explicación de lo que se cuestiona y lo que se espera encontrar. Para presentar el análisis a priori del instrumento de investigación, primero se muestra lo referente al cuestionario y después se expone lo relativo a la entrevista estructurada.

En primer lugar, se presenta la descripción de los problemas que corresponden al cuestionario (Anexo 4). Son quince problemas y se expone el análisis a priori del primer problema, el segundo problema y así sucesivamente.

Problema 1

¿Qué es un espacio vectorial?

El primer problema se refiere a la definición de un espacio vectorial y se espera que el individuo pueda dar dicha definición.

Problema 2

Determinar si los siguientes conjuntos con las operaciones dadas son espacios vectoriales.

a) El conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con las siguientes operaciones:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$$

$$c \cdot \boldsymbol{A} = (ca_{ij}),$$

donde, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ y $c \in \mathbb{R}$.

b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ con la suma de vectores y multiplicación escalar por vector usuales.

El segundo problema lo forman dos incisos, ambos, consideran un conjunto junto con dos operaciones, una operación binaria en ambos casos bien definida y una operación externa (escalar por vector). Se le pide al estudiante que determine si los conjuntos con las operaciones definidas son espacios vectoriales. Esto con el fin de verificar que tipo de estructura evidencian sobre los espacios vectoriales, suponemos que un estudiante con un esquema de espacio vectorial en un nivel trans-EV, podría darle solución a ambos problemas a partir de los axiomas que cumple un espacio vectorial.

Problema 3

¿Qué es una base ordenada para un espacio vectorial de dimensión finita?

El tercer problema se cuestiona acerca de lo que es una base ordenada de un espacio vectorial de dimensión finita. El objetivo es determinar qué idea tiene un individuo acerca de este concepto o si es capaz de dar la definición de base ordenada.

Problema 4

Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices de tamaño 2×2 sobre $\mathbb{R}$, determinar una base ordenada del espacio vectorial dado distinta de $B = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right\}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

El cuarto problema considera el espacio vectorial de matrices de tamaño 2×2 sobre $\mathbb{R}$, es decir, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y una base ordenada del espacio vectorial dado, se espera que un individuo con una concepción proceso de base ordenada sea capaz de determinar otra base ordenada distinta a la dada para responder adecuadamente. Evidencia de esto sería proporcionar un orden diferente en la base dada. Además, podría hacer explícito que el conjunto B para que sea una base, se debe cumplir que a, b, c y d deben ser distintos del cero.

Problema 5

Calcula el determinante de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

El quinto problema considera calcular el determinante de una matriz de tamaño 3×3. Se busca que un individuo con una estructura proceso sea capaz de calcular determinantes de matrices cuadradas.

Problema 6

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones con coeficientes reales encontrar su conjunto de soluciones.

a) $$\begin{aligned} 5x + 6y &= -1 \\ 2x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 4 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= -2 \end{aligned}$$

El sexto problema considera tres sistemas de ecuaciones lineales. El primer sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución, el segundo no tiene solución y el tercero tiene infinitas soluciones. Se considera que los estudiantes con una concepción proceso del conjunto solución de un sistema de ecuaciones (CSSE) podrán calcular las soluciones requeridas independientemente de cual sea el caso.

Problema 7

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices ¿Qué significa que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ sean matrices semejantes?

El séptimo problema se refiere a la definición del concepto matriz semejante se les pide a los estudiantes la definición y se anticipa que el individuo pueda dar dicha definición.

Problema 8

¿Qué es la dimensión de un espacio vectorial?

El problema ocho indaga sobre la definición de la dimensión de espacio vectorial, se espera que los estudiantes sean capaces de dar la definición en términos de su experiencia.

Pregunta 9

a) ¿Qué significa que un vector sea propio para un operador lineal O?

b) ¿Qué significa que un vector sea propio para una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$?

En la cuestión nueve se hacen dos preguntas. La primera pregunta es sobre la definición de vector propio para un operador lineal. La segunda pregunta es sobre la definición de vector propio para una matriz cuadrada. En este problema, se espera que el estudiante de evidencia de lo que entiende o lo que considera que es un vector propio para un operador lineal o para una matriz. Esta cuestión indaga sobre lo que entiende el individuo respecto a dos representaciones del mismo objeto en un contexto diferente.

Pregunta 10

Considera el operador lineal $O: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $(x, y) \mapsto (x, 0)$. Decide cuáles de los vectores del siguiente conjunto C son vectores propios de O en caso de serlo, a qué valor propio están asociados:

$C = \{(2,0), (1,-1), (5,0), (4,1), (0,1), (0,-3), (0,0)\}$.

El problema 10 propone un operador lineal definido de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ y se les da un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ y se le pide al estudiante que determine cuál de los elementos del conjunto son vectores propios, se espera que con una concepción acción de vector propio el estudiante logre identificar a los vectores mediante la evaluación de cada vector del conjunto C en el operador lineal O.

Problema 11

¿Qué es un espacio propio?

El problema 11 indaga sobre un espacio propio, se espera que los estudiantes sean capaces de dar la definición en términos de su experiencia.

Problema 12

¿Qué entiendes por un operador lineal diagonalizable?

El problema 12 es una pregunta abierta. Esta pregunta busca indagar sobre la idea de los estudiantes acerca del operador lineal diagonalizable.

Problema 13

Define formalmente qué es un operador lineal diagonalizable.

En el problema 13 se solicitó al estudiante la definición del concepto operador lineal diagonalizable.

Problema 14

Define formalmente qué significa que una matriz $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sea diagonalizable.

En el problema 14 se pide al estudiante que defina lo que significa que una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sea diagonalizable.

Problema 15

a) ¿Qué es la multiplicidad algebraica de una raíz de un polinomio?

b) ¿Qué es la multiplicidad geométrica de un valor propio?

En el problema 15 se establecen dos incisos. El inciso (a) se cuestiona acerca de la multiplicidad algebraica de una raíz de un polinomio. El inciso (b) se indaga sobre la multiplicidad geométrica de un valor propio. Se espera que los estudiantes proporcionen ideas respecto a estos conceptos o sobre la base de ellos su esquema de los operadores lineales diagonalizables logre coherencia.

En segundo lugar, se presenta la descripción de los problemas que corresponden a la entrevista semiestructurada (Anexo 5). Son once problemas y se expone el análisis a priori del primer problema, el segundo problema y así sucesivamente.

Problema 16

Sea $O: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ el operador lineal dado por $O(x, y) = (x + y, x - y)$ y sean $B_1 = B_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{C}^2$. Encuentra la matriz de O, correspondiente a las bases B_1 y B_2.

El problema 16 considera un operador lineal $O: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido en los números complejos, se da una base ordenada para $\mathbb{C}^2$ y se le pide al estudiante determinar la matriz $[O]_{B_1 \rightarrow B_2}$ correspondiente a las bases B_1 y B_2. En este caso se considera que las bases B_1 y B_2 son iguales. Se considera que un estudiante con una concepción proceso de la MATL sea capaz de determinar dicha representación del operador lineal dado. Además, se evidenciará que la estructura proceso de la MATL es independientemente de la situación matemática y específica.

Problema 17

Sean $\mathbb{R}[x]_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 0, 1, 2, 3\}$ y $\mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 0, 1, 2\}$ los espacios de polinomios de grado menor igual a tres y dos, respectivamente. Considera $D: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, definido por, $f(x) \mapsto f'(x)$ (cada polinomio lo transforma en su derivada). Determina la representación matricial de D, correspondiente a las bases ordenadas $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$.

En el problema 17, se consideran dos espacios vectoriales distintos y un operador lineal bien definido entre ellos, se proporcionan bases ordenadas de cada espacio vectorial y se les pide a los estudiantes que determinen la representación matricial del operador lineal dado. Este problema considera la transformación lineal que transforma a un polinomio en su derivada, se considera que un estudiante con una concepción proceso de MATL es capaz de determinar dicha transformación. Además, mostrará evidencia que la coordinación 1 forma parte de su esquema-OLD y se podría establecer en situaciones matemáticas y específicas.

Problema 18

Considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (6x + 4z, x + 2y + z, -3x - z)$. Encuentra la representación matricial $[f]_B$ respecto a la base canónica ordenada B y la representación matricial $[f]_{B_1}$ respecto a la base ordenada $B_1 = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (4, 1, -3)\}$ y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué representación matricial de f fue más complicada de calcular y por qué?

b) ¿Qué representación matricial para f te parece más conveniente y por qué?

c) ¿Existe otra base $B_2 \neq B_1$ tal que la representación matricial para f también sea diagonal? Justifica tu respuesta.

d) ¿Existe otra base B_3 tal que la representación matricial de f en esa base, sea diagonal y tenga valores distintos en la diagonal de la matriz $[f]_{B_1}$? Justifica tu respuesta.

El problema 18 considera un operador lineal definido sobre $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y se le pide al estudiante determinar la representación matricial con respecto a la base canónica B

y la base B_1 la cual sus elementos son vectores propios. Posteriormente, se le pide que respondan cuatro incisos de manera ordenada, es decir, primero el inciso (a), posteriormente el inciso (b) y así sucesivamente.

El inciso (a) del problema 18, tiene por objetivo indagar sobre cuál de la representación encontrada fue más complicada de determinar y por qué, se espera que el estudiante considere que es más complicado calcular la representación matricial del operador lineal dado respecto a la base canónica B, dado que B_1 la conforman vectores propios y al aplicarles f los envía a un múltiplo de él mismo.

El inciso (b) del problema 18 cuestiona sobre cuál de las dos representaciones encontradas resulta ser más conveniente, entendiendo por conveniente, de que para algún objetivo sea apropiada utilizar dicha representación matricial del operador lineal dado, y se pide que el estudiante explique por qué. En este inciso (b), se busca que el estudiante reflexione acerca de la representación que tienen los operadores lineales respecto a una base específica y que no necesariamente la base canónica resulta ser la más conveniente, según los argumentos que proporcionen se podría ayudar a establecer la coherencia de su esquema-OLD.

El inciso (c) del problema 18, se cuestiona sobre la existencia de otra base B_2 distinta a la base B_1 tal que la representación matricial del operador lineal sea diagonal, es decir, este inciso busca que el estudiante reflexione sobre la unicidad de la base construida con vectores propios, se busca que el estudiante sea capaz de dar otra base. Con una concepción proceso de base ordenada y coordinando con la concepción proceso de vector propio será capaz de proporcionar una base distinta. En el caso de evocar al esquema-OLD, se espera que surjan los conceptos de espacio propio y que manifieste la coordinación 3 para encontrar una base ordenada conformada por vectores propios.

El inciso (d) del problema 18, se cuestiona acerca de la existencia de una base B_3 tal que la representación matricial del operador lineal f dado en esa base, sea diagonal y tenga valores distintos en la diagonal principal del matriz $[f]_{B_1}$, este inciso busca que el estudiante reflexione sobre la unicidad de los valores propios asociados a un vector propio, es decir, que coordine los procesos de polinomio característico y cero de un polinomio como el proceso de valor propio, con este nuevo proceso el estudiante puede tener una manera decidir sobre las soluciones del polinomio y saber que son únicas salvo la multiplicidad. En el caso de evocar al esquema-OLD se espera que surja la coordinación 2, es decir, que se relacionen los conceptos: espacio vectorial, operador lineal, base ordenada, matriz asociada a una transformación lineal por medio del polinomio característico.

Problema 19

Encuentra una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz invertible $\boldsymbol{P}$ tales que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, para la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

El problema 19 considera encontrar una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz invertible $\boldsymbol{P}$ tal que se satisfaga la relación $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ para una matriz $\boldsymbol{A}$ cuadrada de dos por dos cuyos valores propios son diferentes, el problema busca evidenciar la coordinación 5 y como el esquema-OLD logra coherencia, es decir, el estudiante es capaz de establecer relaciones y lograría determinar dichas matrices.

Problema 20

Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ¿$\boldsymbol{A}$ es diagonalizable?

El problema 20, se da una matriz cuadrada de dos por dos y se cuestiona sobre si es diagonalizable, se espera que un estudiante con un desarrollo de nivel trans-OLD sea capaz de determinar las relaciones de polinomio característico asociado a la matriz y el análisis de sus raíces para determinar si es diagonalizable o no, es decir, busca evidenciar la coordinación 5 y como el esquema-OLD logra coherencia por medio de la comparación de la multiplicidad algebraica y geométrica.

Problema 21

Dada la matriz $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, calcular $\boldsymbol{B}^{100}$.

Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, calcular $\boldsymbol{A}^{100}$.

El problema 21 considera una matriz $\boldsymbol{B}$ de tres por tres con coeficientes en los números reales y pide calcular $\boldsymbol{B}^{100}$. Además, considera una matriz $\boldsymbol{A}$ de dos por dos con coeficientes en los números reales y pide calcular $\boldsymbol{A}^{100}$.

El objetivo es que los estudiantes evoquen al esquema-OLD y ver si muestran evidencia de la tematización del esquema-OLD, es decir, usen la coherencia de su esquema-OLD e infieran que la matriz dada es diagonalizable y le apliquen la acción de diagonalizar la matriz para poder usar esta representación matricial más sencilla y así dar solución al problema planteado.

Problema 22.

Decide si el operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1,\, x_2) = 24x_1 + 20x_2,$ $-30x_1 - 26x_2)$. Es diagonalizable el operador lineal dado. Justifica tu respuesta.

Problema 23.

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$. Es diagonalizable el operador lineal dado. Justifica tu respuesta.

Los problemas 22 y 23 consideraron operadores lineales definidos en espacios euclidianos. En ambos problemas, se le pide al estudiante que determine si el operador lineal dado es diagonalizable. Se busca evidenciar a los estudiantes que evoquen al esquema-OLD. Se consideran espacios euclidianos para determinar si está en un nivel inter-OLD o trans-OLD dependiendo de las relaciones que establezca con los conceptos involucrados: espacio propio-conjunto generador; espacio propio-multiplicidad algebraica o por medio de la dimensión: operador lineal-base ordenada por medio de la MATL., etc.

Problema 24

Considera la siguiente matriz $\boldsymbol{R(\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ¿Para qué valores de θ, $\boldsymbol{R(\theta)}$ es diagonalizable?

En el problema 24, se pide determinar para qué valores una matriz de rotación es diagonalizable en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. La expectativa es que los estudiantes evoquen a su esquema-OLD y manifiesten las relaciones: coordinación 2, Coordinación 3.

Problema 25

Da una matriz no diagonal de 2×2 cuyos valores propios sean 2 y -3 y cuyos vectores propios asociados sean $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

El problema 25, solicita al estudiante una matriz no diagonal con valores y vectores propios específicos, una posibilidad es que él pueda construir una matriz diagonalizable y establecer relaciones al evocar su esquema-OLD. Por ejemplo, establecer la relación entre la matriz buscada y la matriz diagonal $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, es decir, se busca que aparezca la relación $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ y el estudiante con un desarrollo trans-OLD será capaz de determinar las matrices $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ a partir de las relaciones entre esos conceptos.

Problema 26

Sea $\boldsymbol{A}$ no singular y $\boldsymbol{A}$ diagonalizable ¿$\boldsymbol{A}^{-1}$, es diagonalizable?

Problema 26 considera una matriz $\boldsymbol{A}$ invertible y diagonalizable. Se cuestiona al estudiante si $\boldsymbol{A}^{-1}$ es diagonalizable. Se espera que el estudiante evoque al esquema-OLD en un nivel de desarrollo trans-OLD, evidencia es que el estudiante utiliza la propiedad siguiente: una matriz invertible no tienen al 0 como valor propio.

En estos problemas (16 al 26) se busca que los participantes nos den información acerca de las relaciones que establecen entre los conceptos involucrados en los operadores lineales diagonalizables cuando proporcionan una solución a los problemas planeados.

3.3.6 Recolección de datos

En la recolección de los datos, en primer lugar se aplicó un cuestionario en dos sesiones de una hora cada una. En la sesión 1, se respondió (del problema 1 al 7) en un tiempo de hora y media. En la sesión 2, se respondió (del problema 7 al 15) en un tiempo de hora. La aplicación de la prueba se realizó en días diferentes.

Posteriormente, se aplicó la entrevista a cinco estudiantes quienes mostraron tener los conocimientos básicos de Álgebra Lineal los cuales son requeridos para decidir si un operador lineal es diagonalizable, dos de ellos eran del caso 1 y tres del caso 2. La entrevista se hizo de manera individual en dos sesiones, las citaremos sesión 3 y sesión 4 respectivamente. La entrevista se respondió en un tiempo de 3 horas por cada estudiante. La sesión 3, tuvo una duración de una hora y veinte minutos (se respondió del problema 16 al 18). La sesión 4, duró un tiempo de hora y cuarenta minutos (se respondió del problema 19 al 26). La aplicación de la entrevista se realizó en días diferentes. Cada sesión fue grabada en video y transcrita. El instrumento de investigación lo respondieron de manera individual en un ambiente de papel y lápiz.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE DATOS

Este capítulo se encuentra estructurado en tres secciones. En la primera sección, se exponen las consideraciones para el análisis de datos. En la segunda sección, se presenta el análisis a posteriori del instrumento de investigación que corresponde al cuestionario. En la tercera sección, se muestra el análisis a posteriori del instrumento de investigación que corresponde a la entrevista.

4.1 Consideraciones para el análisis de datos

El análisis de los datos se hizo en dos momentos. El primer momento, consistió en analizar las respuestas del cuestionario sobre los conocimientos básicos asociados a los operadores lineales diagonalizables. Posteriormente, se hacen inferencias a partir de las respuestas de los participantes. Para hacer las inferencias, se revisaron las respuestas de los estudiantes centrando la atención en la definición del concepto y cómo lo utilizaban para responder los problemas, en concreto, su respuesta se interpreta a través de la lente de la teoría APOE.

En un segundo momento, se realizó la transcripción textual de la entrevista. Posteriormente, en la transcripción seleccionamos fragmentos de entrevista bajo 3 aspectos: 1) contienen las construcciones que fueron consideradas en el análisis a priori del instrumento de investigación; 2) incluyen las construcciones logradas por los mecanismos mentales que establecían y no fueron consideradas en el análisis a priori pero emergieron en las respuestas de los estudiantes al instrumento de investigación; 3) implicaran las relaciones entre los conceptos matemáticos que establecieron los estudiantes en la situación de decidir si el operador lineal era diagonalizable. Dichas relaciones se identificaron a partir de la construcción lograda por medio de algún tipo de abstracción reflexiva.

Posteriormente, cada uno de los fragmentos elegidos se interpretó desde la perspectiva de la teoría APOE.

En ambos momentos del análisis, las respuestas por parte de los estudiantes se interpretaron desde la perspectiva de la teoría APOE con la ayuda de la caracterización de los conceptos expuesta en el Anexo 3.

4.2 Análisis a posteriori del instrumento de investigación: cuestionario

La simbología utilizada en algunos casos para ayudar con el análisis fue la siguiente: se denota a los estudiantes del caso 1 por E1, E2 y a los estudiantes del caso 2 por E3, E4 y E5. Al entrevistador se denota por E. Se utiliza la simbología definida con antelación, por ejemplo: EV-espacio vectorial; MATL-matriz asociada a una transformación lineal, etc.

Para la presentación del análisis a posteriori del cuestionario. Para comenzar, se presenta el análisis respecto a la definición de los conceptos seleccionados (ver sección 3.3.4). Posteriormente, se presenta la estructura encontrada de los conceptos seleccionados.

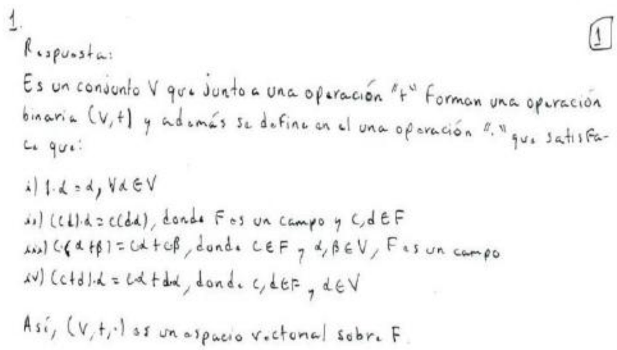
4.2.1 Análisis de las definiciones

El objetivo principal es exponer la definición de los conceptos: espacio vectorial, base ordenada de un espacio vectorial de dimensión finita, matriz semejante y dimensión finita, vector propio, espacio propio, multiplicidad algebraica y geométrica, operador lineal diagonalizable y matriz diagonalizable, que tienen los participantes de la investigación y sustentar porqué los E1, E2, E3, E4 y E5 fueron seleccionados para la entrevista.

En relación al concepto espacio vectorial los E1, E2, E3, E4 y E5 son capaces de dar algunos axiomas que se deben satisfacer para que un conjunto no vacío junto con una operación que se llama suma (+) y una aplicación (operación externa) sea un espacio vectorial. Se muestra como ejemplo de evidencia la respuesta de E1 y E4, Figura 5 y Figura 6 respectivamente.

Figura 5

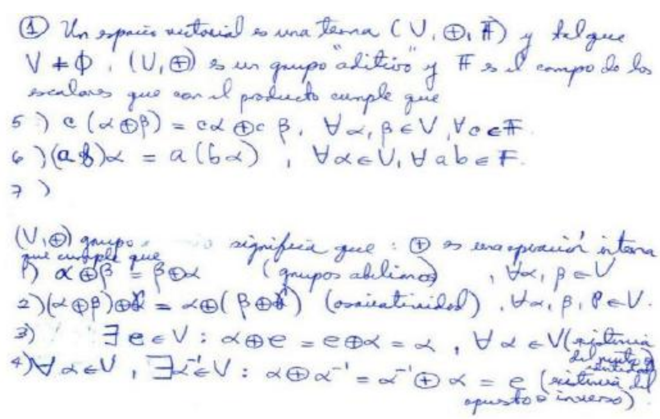
Respuesta al Problema 1. E1


1.
Respuesta:
Es un conjunto V que junto a una operación "+" forman una operación binaria $(V,+)$ y además se define en el una operación "·" que satisface que:
i) $1\cdot\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in V$
ii) $(cd)\cdot\alpha = c(d\alpha)$, donde F es un campo y $c,d \in F$
iii) $c(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta$, donde $c \in F$ y $\alpha,\beta \in V$, F es un campo
iv) $(c+d)\cdot\alpha = c\alpha + d\alpha$, donde $c,d \in F$, $\alpha \in V$
Así, $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre F.

El estudiante E2 define lo que es un espacio vectorial, Figura 6.

Figura 6

Respuesta al Problema 1. E2


① Un espacio vectorial es una terna $(V, \oplus, F)$ y tal que $V \neq \emptyset$, $(V,\oplus)$ es un grupo "aditivo" y F es el campo de los escalares que con el producto cumple que
5) $c(\alpha \oplus \beta) = c\alpha \oplus c\beta$, $\forall \alpha,\beta \in V$, $\forall c \in F$
6) $(ab)\alpha = a(b\alpha)$, $\forall \alpha \in V$, $\forall a\, b \in F$
7)
$(V,\oplus)$ grupo significa que: $\oplus$ es una operación interna que cumple que
1) $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$ (grupos abelianos), $\forall \alpha, \beta \in V$
2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$ (asociatividad), $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$
3) $\exists e \in V : \alpha \oplus e = e \oplus \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in V$ (existencia del neutro identidad)
4) $\forall \alpha \in V$, $\exists \alpha^{-1} \in V : \alpha \oplus \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \oplus \alpha = e$ (existencia del opuesto o inverso)

Por otro lado, con respecto a la base ordenada los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 fueron capaces de dar la definición de base de un espacio vectorial pero en algunos casos omiten el orden en la base al dar su definición de este concepto. Se muestra como ejemplo de evidencia la respuesta de E2 y E4, Figura 7 y Figura 8 respectivamente.

Figura 7

Respuesta al Problema 3. E2

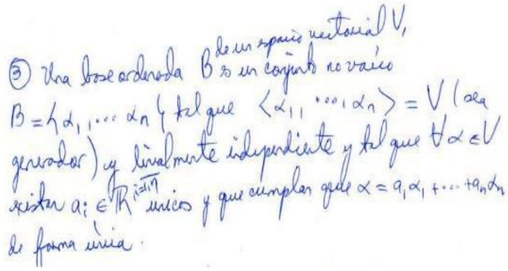
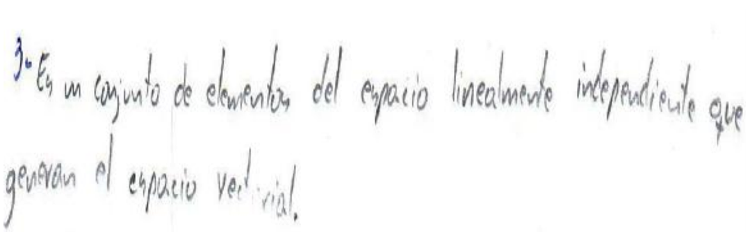

③ Una base ordenada B de un espacio vectorial V, es un conjunto no vacío $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tal que $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = V$ (es generador) y linealmente independiente y tal que $\forall \alpha \in V$ existen $a_i \in \mathbb{R}^{i=1,n}$ únicos y que cumplan que $\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$ de forma única.

Figura 8

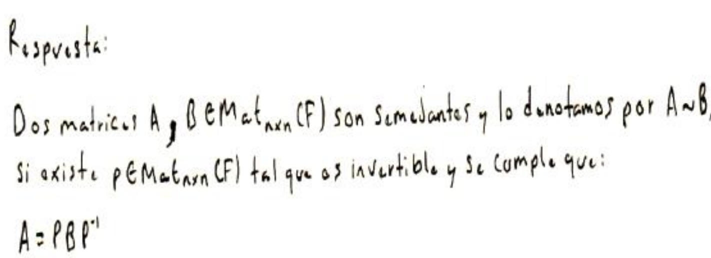
Respuesta al Problema 3. E4


3. Es un conjunto de elementos del espacio linealmente independiente que generan el espacio vectorial.

Además, en lo que se refiere a la matriz semejante, E1 fue capaz de definir el concepto. Los estudiantes E2, E4 y E5 respondieron de manera análoga a E1 (ver Figura 9). Por otro lado, E3 recordó y expuso la definición de matrices equivalentes por filas (ver Figura 10).

Figura 9

Respuesta de Semejanza de Matrices. E1

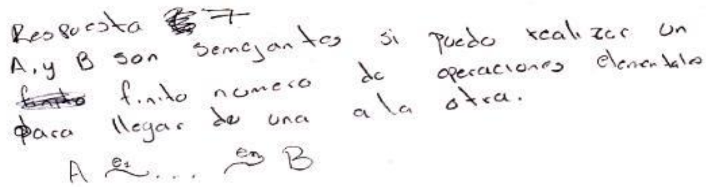

Respuesta:

Dos matrices A y $B \in Mat_{n\times n}(F)$ son semejantes y lo denotamos por $A \sim B$, si existe $P \in Mat_{n\times n}(F)$ tal que es invertible y se cumple que:

$A = PBP^{-1}$

Figura 10

Respuesta de Semejanza de Matrices. E3



Los E1, E2, E3, E4 y E5 fueron capaces de responder en términos de sus conocimientos en relación del concepto dimensión finita de un espacio vectorial, los cuales convergen al cardinal (número de elementos) de una base del espacio vectorial dado. Se muestra como ejemplo la respuesta de E2 y E5 en la Figura 11 y Figura 12 respectivamente.

Figura 11

Respuesta de Dimensión Finita. E2

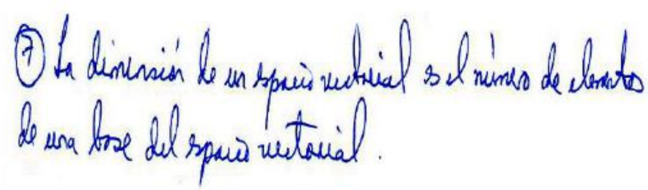
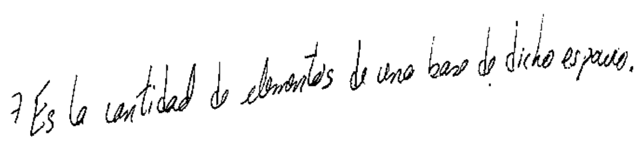


Figura 12

Respuesta de Dimensión Finita. E5



En referencia al vector propio de un operador lineal y vector propio de una matriz, en las ecuaciones $O(x) = \lambda x$ y $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, E1 no escribió que se buscan los vectores distintos del vector cero para ambos casos. E2 sólo es capaz de definir los vectores propios para el caso de matrices. E3 manifiesta que los valores que deben ser distintos de cero son los escalares, pero reconoce a los vectores propios como aquellos que al evaluar en el operador lineal van a un múltiplo del vector. E4 responde adecuadamente para ambos casos. E5 no escribió que se buscan los vectores distintos del vector cero para ambos casos.

Se muestra como ejemplo de evidencia la respuesta de E1 (Figura 13 y 14) y E3 (Figura 15 y 16).

Figura 13

Respuesta de Vector Propio de un Operador Lineal. E1

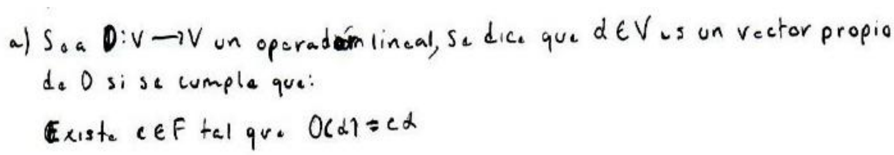

a) Sea $D: V \to V$ un operador lineal, se dice que $\alpha \in V$ es un vector propio de D si se cumple que:
Existe $c \in F$ tal que $D(\alpha) = c\alpha$

Figura 14

Respuesta de Vector Propio de una Matriz. E1

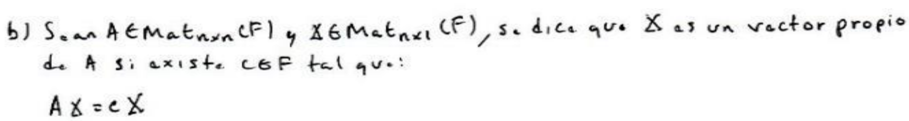

b) Sean $A \in Mat_{n \times n}(F)$ y $X \in Mat_{n \times 1}(F)$, se dice que X es un vector propio de A si existe $c \in F$ tal que:
$AX = cX$

Figura 15

Respuesta de Vector Propio de un Operador Lineal. E3

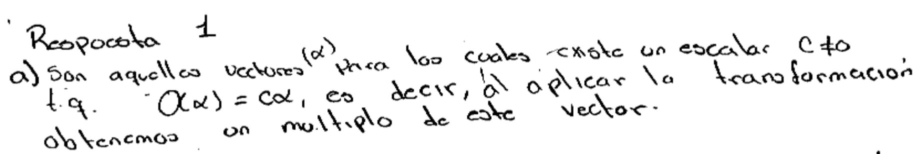
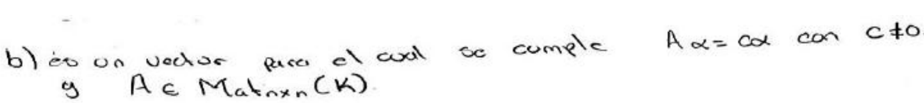

Respuesta 1
a) Son aquellos vectores (α) para los cuales existe un escalar $c \neq 0$ t.q. $O(\alpha) = c\alpha$, es decir, al aplicar la transformación obtenemos un múltiplo de este vector.

Figura 16

Respuesta de Vector Propio de una Matriz. E3


b) es un vector para el cual se cumple $A\alpha = c\alpha$ con $c \neq 0$.
y $A \in Mat_{n \times n}(K)$.

En relación al espacio propio, E1 definió al espacio propio como el espacio generado por un vector propio de un operador lineal que está asociado a algún valor propio (Figura 17). E2 consideró al espacio propio como aquel que es generado por los vectores propios (Figura 18). E3 consideró como un espacio propio al generado por los vectores asociados a cierto valor propio de la transformación (Figura 19). E4 mencionó no recordar lo que es un espacio propio (Figura 20). E5 consideró al espacio propio como un espacio vectorial que es generado por los vectores propios asociados a un mismo valor propio (Figura 21). Así al espacio propio E1, E2, E3 y E5 fueron capaces de definirlo en términos de su experiencia. E4 escribió que no recuerda el concepto.

Figura 17

Respuesta de Espacio Propio. E1

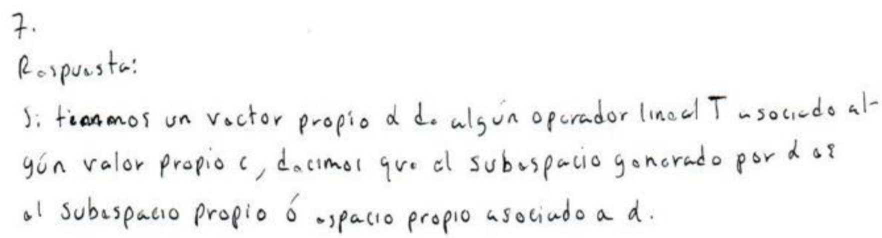

7.
Respuesta:
Si tenemos un vector propio α de algún operador lineal T asociado al- gún valor propio c, decimos que el subespacio generado por α es el subespacio propio ó espacio propio asociado a α.

Figura 18

Respuesta de Espacio Propio. E2


(6) Un espacio propio es aquel generado por los vectores propios.

Figura 19

Respuesta de Espacio Propio. E3

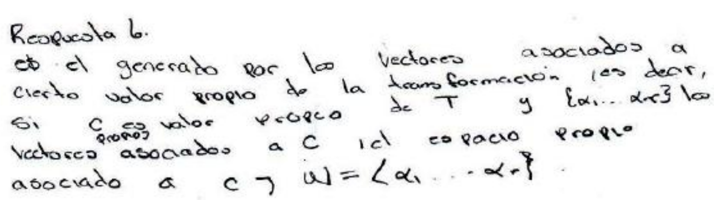

Respuesta 6.
es el generado por los vectores asociados a cierto valor propio de la transformación de T (es decir, si c es valor propio y {α1 … αr} los vectores propios asociados a c, el espacio propio asociado a c → W = ⟨α1 . . . αr}

Figura 20

Respuesta de Espacio Propio. E4

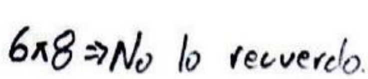
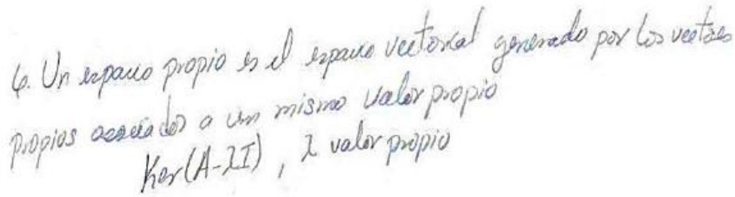

6∧8 ⇒ No lo recuerdo.

Figura 21

Respuesta de Espacio Propio. E5

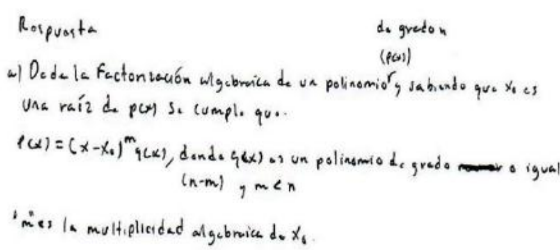


6. Un espacio propio es el espacio vectorial generado por los vectores propios asociados a un mismo valor propio
$Ker(A-\lambda I)$, λ valor propio

En referencia a la multiplicidad algebraica de una raíz de un polinomio, E1 la definió como el exponente de la raíz que divide un polinomio dado. E2 responde de manera formal dando evidencia de conocer dicha definición. E5 la definió como la cantidad de veces que aparece la raíz en la descomposición del polinomio (quizá se refirió al polinomio característico asociado al operador lineal) en factores irreducibles. Los E1, E2 y E5 respondieron a lo que es la multiplicidad algebraica. E3 y E4 no respondieron esta cuestión. Se muestran las respuestas de E1, E2 y E5 en la Figura 22, Figura 23 y Figura 24 respectivamente.

Figura 22

Respuesta de la Multiplicidad Algebraica. E1



Respuesta

a) Dada la Factorización algebraica de un polinomio de grado n (p(x)) y sabiendo que x_0 es una raíz de p(x) se cumple que:

$p(x) = (x-x_0)^m q(x)$, donde q(x) es un polinomio de grado ~~menor~~ o igual (n-m) y m < n

m es la multiplicidad algebraica de x_0.

Figura 23

Respuesta de la Multiplicidad Algebraica. E2

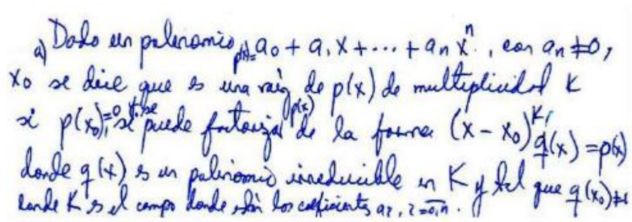
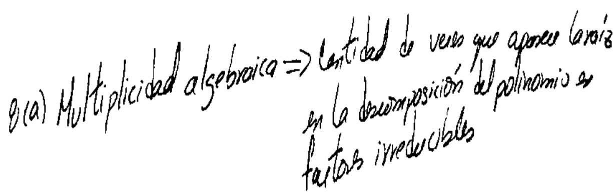

a) Dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, con $a_n \neq 0$, x_0 se dice que es una raíz de $p(x)$ de multiplicidad k si $p(x_0) = 0$, y $p(x)$ se puede factorizar de la forma $(x - x_0)^k q(x) = p(x)$ donde $q(x)$ es un polinomio irreducible en K y tal que $q(x_0) \neq 0$ donde K es el campo donde están los coeficientes a_i, $i = \overline{0,n}$.

Figura 24

Respuesta de la Multiplicidad Algebraica. E5


b)(a) Multiplicidad algebraica $\Rightarrow$ Cantidad de veces que aparece la raíz en la descomposición del polinomio en factores irreducibles

En el caso de la multiplicidad geométrica, E1 escribió que es aquella donde un valor propio c de algún operador lineal T, está asociado a alguna matriz $\boldsymbol{A}$ respecto a una base de V, “se dice que la dimensión algebraica de c es la cardinalidad de alguna base B de $ker(\boldsymbol{A} - cI)$, es decir, $|B| =$ dimensión algebraica de c” (ver Figura 25). E5 mencionó que es la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio (ver Figura 26). Los E2, E3 y E4 no respondieron, además mencionaron no haber tratado el concepto, se muestra como evidencia la respuesta de E4 (Figura 27).

Figura 25

Respuesta de la Multiplicidad Geométrica. E1

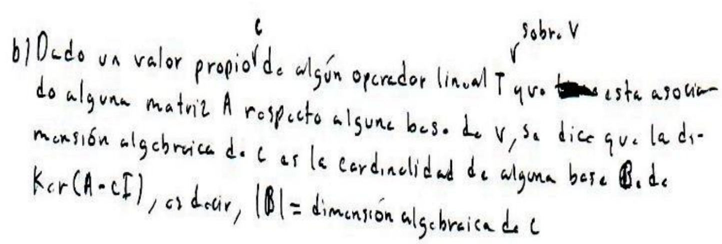

b) Dado un valor propio c de algún operador lineal T sobre V que esta asociado alguna matriz A respecto alguna base de V, se dice que la dimensión algebraica de c es la cardinalidad de alguna base B de $Ker(A - cI)$, es decir, $|B| =$ dimensión algebraica de c

Figura 26

Respuesta de la Multiplicidad Geométrica. E5

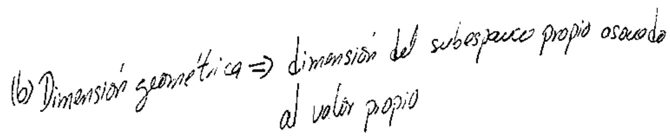
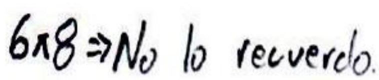

(b) Dimensión geométrica ⇒ dimensión del subespacio propio asociado
al valor propio

Figura 27

Respuesta de la Multiplicidad Geométrica. E4


6 ∧ 8 ⇒ No lo recuerdo.

En relación con definir un operador lineal diagonalizable E2 no responde. Por otro lado, los E1, E3, E4 y E5 intentaron dar la definición por medio de la representación matricial del operador lineal respecto a una base que proporcionar la definición de un operador lineal diagonalizable en su representación funcional, es decir, tuvieron la tendencia a responder la definición de Friedberg et al. (1982); Poole (2011) que dar la definición de Hoffman y Kunze (1973), se sugiere ver las definiciones en el Anexo 1. Se muestra como evidencia la respuesta de E1 y E4 en la Figura 28 y Figura 29 respectivamente.

Figura 28

Respuesta del Operador Lineal Diagonalizable. E1

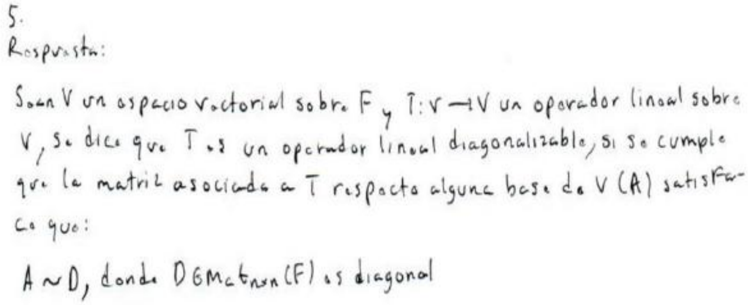
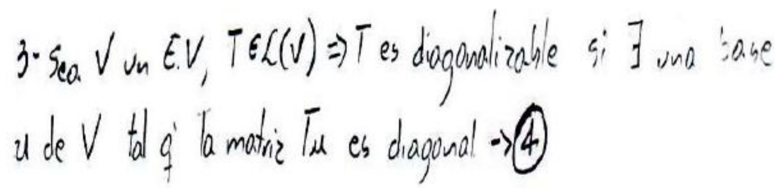

5.
Respuesta:
Sean V un espacio vectorial sobre F y $T: V \to V$ un operador lineal sobre V, se dice que T es un operador lineal diagonalizable, si se cumple que la matriz asociada a T respecto alguna base de V (A) satisface que:
$A \sim D$, donde $D \in Mat_{n \times n}(F)$ es diagonal

Figura 29

Respuesta del Operador Lineal Diagonalizable. E4


3- Sea V un E.V, $T \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow T$ es diagonalizable si $\exists$ una base
u de V tal q' la matriz T_u es diagonal $\rightarrow$ 4

En lo concerniente a la matriz diagonalizable E1, E4 y E5 son capaces de proporcionar la definición de Nicholson (2018) de matriz diagonalizable, se muestra como ejemplo de evidencia las respuestas de E4 y E5 en la Figura 30 y Figura 31 respectivamente. E2 no responde la pregunta. E3 consideró que las matrices diagonalizables a partir de operaciones elementales se pueden llevar a una matriz diagonal.

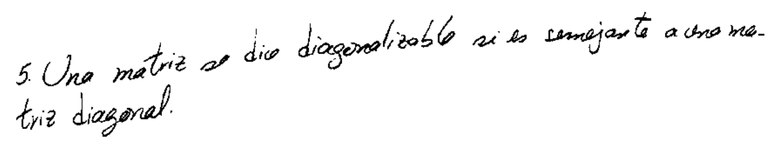
Figura 30

Respuesta de Matriz Diagonzalible. E4


5- A es diagonalizable si $\exists$ una matriz semejante diagonal.
$P^{-1}AP = D \rightarrow$ diagonal.

Figura 31

Respuesta de Matriz Diagonzalible. E5


5. Una matriz se dice diagonalizable si es semejante a una ma-
triz diagonal.

En consecuencia, con la evidencia recolectada se concluye que los E1, E2, E3, E4 y E5 son capaces de dar las definiciones o tener una idea cercana a los conceptos: espacio vectorial, base ordenada de un espacio vectorial de dimensión finita, matriz semejante, dimensión finita, vector propio, espacio propio, multiplicidad algebraica y geométrica, operador lineal diagonalizable y matriz diagonalizable.

Por otro lado, resaltan tres aspectos: 1) sobre la definición de multiplicidad algebraica de una raíz de un polinomio, los estudiantes respondieron con ideas cercanas al concepto; 2) sobre la multiplicidad geométrica de un valor propio, los estudiantes respondieron no recordar la definición del concepto (E2, E3, E4). Sólo E1 y E5 fueron capaces responder a esta pregunta; 3) los participantes, mostraron la tendencia a considerar un operador lineal diagonalizable como aquel que su representación matricial es semejante a una matriz diagonal.

4.2.2 Estructuras encontradas en el cuestionario

Se presenta la estructura que muestran los estudiantes de los conceptos: espacio vectorial, base ordenada, determinante y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con base en la descripción de las descomposiciones genéticas expuestas en el Anexo 3.

Los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 muestran evidencia de evocar a su esquema-EV en un nivel trans-EV al trabajar con los diferentes espacios vectoriales propuestos, basando su coherencia en los axiomas que debe satisfacer un espacio vectorial. Se muestra como ejemplo la respuesta de E2 y E3 al inciso (b), del problema 2, Figura 32 y Figura 33 respectivamente.

Figura 32

Evidencia del Esquema del Espacio Vectorial. E2

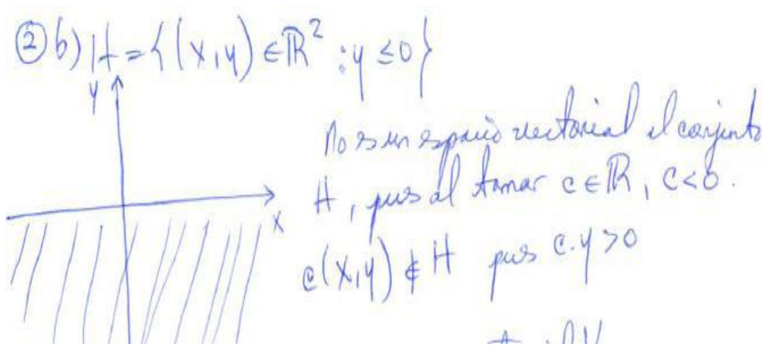
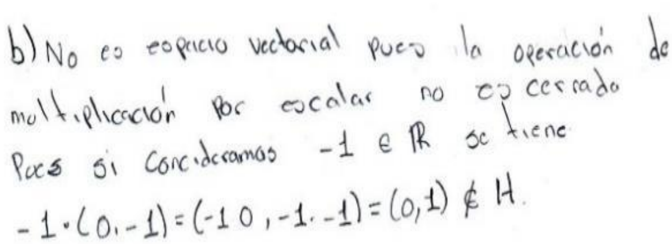


Figura 33

Evidencia del Esquema del Espacio Vectorial. *E3*



En cuanto al concepto de base ordenada, los E1, E3, E4 y E5 evidenciaron una estructura proceso, dado que, son capaces de dar un orden diferente en la base y siguen considerando como base al conjunto dado. Por otro lado, E2 construye una base distinta dando evidencia de una concepción proceso de base. Se muestra como ejemplo lo que expusieron E2 y E4, Figura 34 y Figura 35 respectivamente.

Figura 34

Estructura Proceso de Base Ordenada. E2

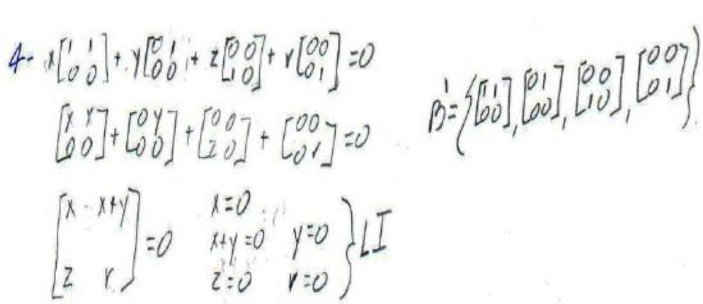
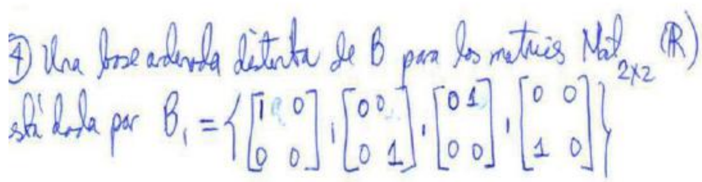


Figura 35

Estructura Proceso de Base Ordenada. E4



En relación al conjunto de solución de un sistema de ecuaciones lineales (CSSE), derivado de las respuestas de los participantes E1, E2, E3, E3 y E5 podemos concluir que tienen una concepción proceso, es decir, cuando sea necesario podrían determinar el conjunto solución para algún sistema de ecuaciones lineales ya sea que tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución, según sea el caso. Se muestra como ejemplo de evidencia la respuesta de E4 en la Figura 36, 37 y 38.

Figura 36

Respuesta al Problema 6, Inciso a. E4

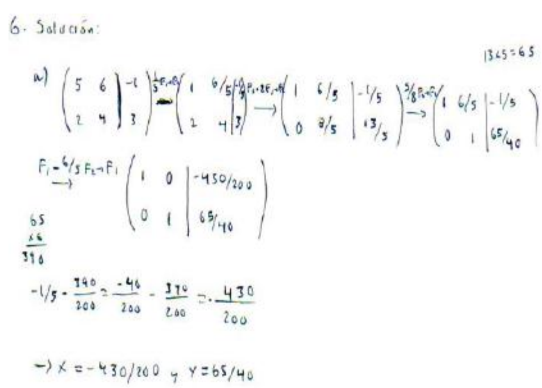


Figura 37

Respuesta al Problema 6, Inciso b. E4

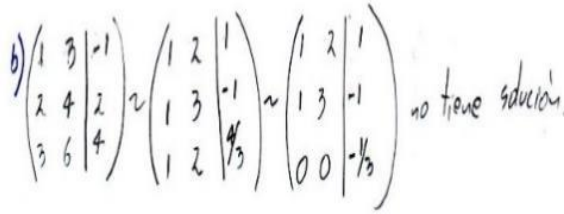
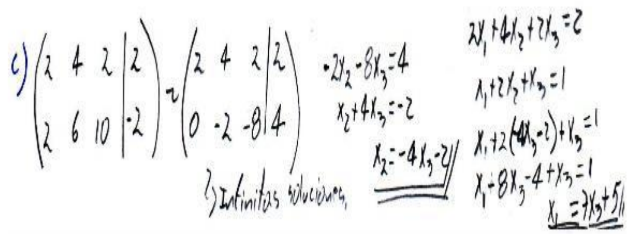


Figura 38

Respuesta al Problema 6, Inciso c. E4



En relación con la matriz asociada a una transformación lineal los E1, E2, E3, E4 y E5 evidenciaron al menos una estructura proceso y no tuvieron dificultad en calcular la representación matricial de las transformaciones lineales en los problemas 16, 17 y 18. Se expone como ejemplo la respuesta al problema 18 de E2 y E5 en la Figura 39 y Figura 40 respectivamente.

Figura 39

Estructura Proceso de la MATL. E2

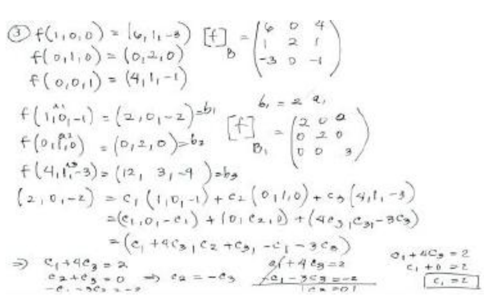
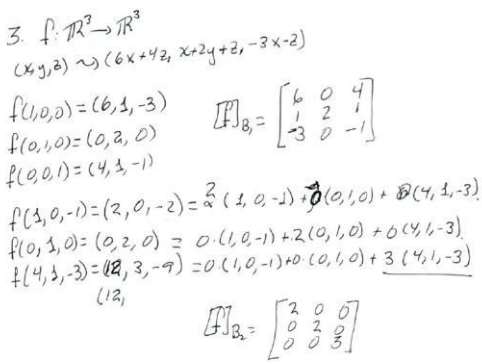


Figura 40

Estructura Proceso de la MATL. E5



En referencia al vector propio E4 y E5 evidenciaron una estructura acción de vector propio al resolver el problema 10, se muestra como ejemplo lo que expusieron E4 y E5, Figura 41 y Figura 42 respectivamente. Además, los estudiantes E4 y E5 durante la entrevista mostraron una estructura más que acción de los conceptos valor y vector propio, en la sección siguiente se muestran ejemplos. Por otro lado, los estudiantes E1, E2 y E3 mostraron las coordinaciones 1, 2 y 3 en su respuesta al problema 10, se muestra un ejemplo de evidencia en la sección posterior.

Figura 41

Respuesta al Problema 10. E4

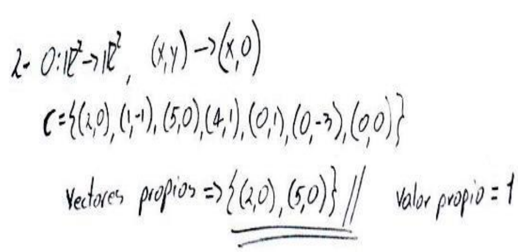


Figura 42

Respuesta al Problema 10. E5

2. $O:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad O(2,0)=(2,0)=1\cdot(2,0)$ Sí, valor propio $\lambda=1$

$(x,y) \rightsquigarrow (x,0)$ $\quad O(1,-1)=(1,0)$ No

$O(5,0)=(5,0)=1\cdot(5,0)$ Sí, valor propio $\lambda=1$

$O(4,1)=(4,0)$ No $\quad O(0,1)=(0,0)$ No $\quad O(0,-3)=(0,0)$ No

$(0,0)$ Nunca es un vector propio

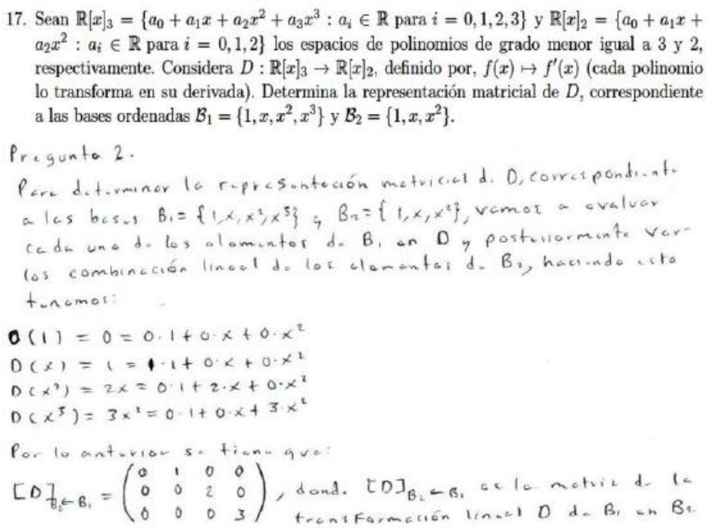
En lo que concierne a las estructuras de los conceptos: espacio vectorial, base ordenada, determinante y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con base en la evidencia recolectada se infiere que los participantes E1, E2, E3, E4 y E5 mostraron una estructura proceso o acción como mínima de estos conceptos.

4.3 Análisis a posteriori del instrumento de investigación: entrevista

En el análisis a priori se consideró que un individuo con una estructura proceso de la MATL, en los problemas 16 y 17 podría determinar dicha representación matricial. Los cinco estudiantes consiguieron trabajar con los espacios vectoriales distintos. Además, lograron coordinar los procesos EV, OL, BO en el proceso de MATL, es decir, la coordinación 1. Para lograr esta coordinación, los estudiantes trabajaron en los espacios vectoriales de dimensión finita propuestos, esto fue posible por su estructura trans-EV. Además, con su estructura proceso de operador lineal lograron evaluar cada vector de la base de salida en el operador lineal dado. Posteriormente, con su estructura proceso de base ordenada determinaron las imágenes resultantes como combinación lineal de los vectores de la base de llegada. Después, se quedaron con la información de los escalares de la combinación lineal y los establecieron como columnas de la matriz asociada al operador lineal, es decir $[O]_B$. Esto lo hicieron para los casos cuando se les pide construir la MATL cuando la base del dominio y del contradominio es la misma y cuando son distintas. Se muestra como ejemplo lo que hizo E1 en el problema 17 (ver la Figura 43).

Figura 43

Estructura Proceso de la MATL. E1


17. Sean $\mathbb{R}[x]_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2, 3\}$ y $\mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2\}$ los espacios de polinomios de grado menor igual a 3 y 2, respectivamente. Considera $D : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2$, definido por, $f(x) \mapsto f'(x)$ (cada polinomio lo transforma en su derivada). Determina la representación matricial de D, correspondiente a las bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}$.

Pregunta 2.

Para determinar la representación matricial de D, correspondiente a las bases $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$, vamos a evaluar cada uno de los elementos de B_1 en D y posteriormente ver las combinación lineal de los elementos de B_2, haciendo esto tenemos:

$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$

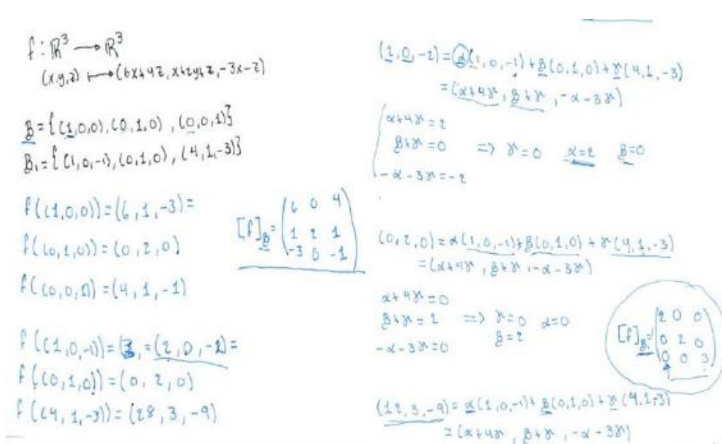
Por lo anterior se tiene que:

$[D]_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, donde $[D]_{B_2 \leftarrow B_1}$ es la matriz de la transformación lineal D de B_1 en B_2.

En lo que respecta al problema 18 los E1, E2, E3, E4 y E5 lograron calcular la matriz asociada a la transformación lineal para cada base específica. Los cinco estudiantes tienen al menos una estructura proceso del concepto MATL de acuerdo con la caracterización realizada por Montelongo (2016), Anexo 3. Se expone como evidencia la respuesta de E3 y E4 en la Figura 44 y Figura 45 respectivamente.

Figura 44

Estructura Proceso de la MATL. E3


$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto (6x+4z,\ x+2y+z,\ -3x-z)$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$B_1 = \{(1,0,-1), (0,1,0), (4,1,-3)\}$

$f((1,0,0)) = (6,1,-3) =$

$f((0,1,0)) = (0,2,0)$

$f((0,0,1)) = (4,1,-1)$

$[f]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$f((1,0,-1)) = (2,0,-2) =$

$f((0,1,0)) = (0,2,0)$

$f((4,1,-3)) = (28,3,-9)$

$(2,0,-2) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,0) + \gamma(4,1,-3)$
$= (\alpha+4\gamma,\ \beta+\gamma,\ -\alpha-3\gamma)$

$\alpha+4\gamma = 2$, $\beta+\gamma = 0$, $-\alpha-3\gamma = -2$ $\Rightarrow \gamma = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$

$(0,2,0) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,0) + \gamma(4,1,-3)$
$= (\alpha+4\gamma,\ \beta+\gamma,\ -\alpha-3\gamma)$

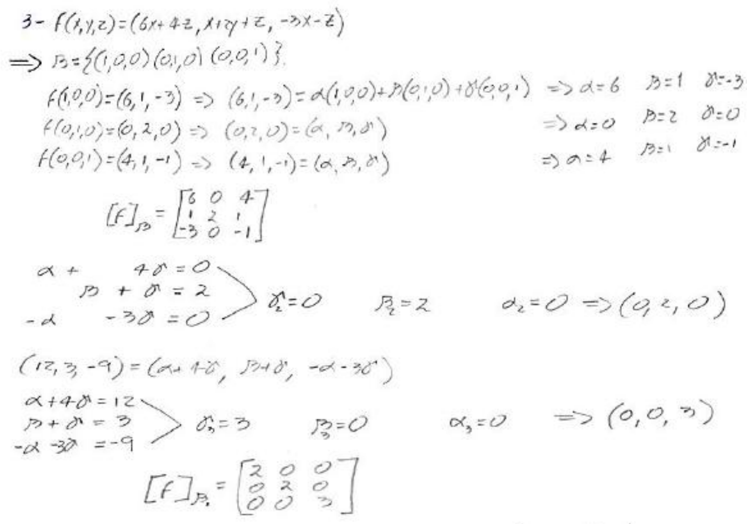
$\alpha+4\gamma = 0$, $\beta+\gamma = 2$, $-\alpha-3\gamma = 0$ $\Rightarrow \gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$

$[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$(28,3,-9) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,0) + \gamma(4,1,-3)$
$= (\alpha+4\gamma,\ \beta+\gamma,\ -\alpha-3\gamma)$

Figura 45

Estructura Proceso de la MATL. E4



En el inciso (a) del problema 18 los participantes E1, E2, E3, E4 y E5 coinciden en que la matriz más complicada de calcular fue $[f]_{B_1}$, a pesar de que la base B_1 es una base donde todos sus elementos son vectores propios de f. La justificación y preferencia que le dan a la base canónica en el caso de montar una MATL converge en hacer menos cálculos puesto que no deben encontrar las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base de salida. Se resalta el hecho que los estudiantes no interiorizan al momento de calcular las imágenes de los vectores de la base B_1 que son vectores propios, es decir, que son diferentes de cero y satisfacen la igualdad $f(v_i) = \lambda v_i$ con $v_i \in B_1$. Se muestra como ejemplo de evidencia el fragmento de la entrevista realizada a E2 y E3 en la Tabla 2 y Tabla 3 respectivamente.

Tabla 2

Fragmento de Entrevista. Problema 18, Inciso a. E2

Diálogo	Representación

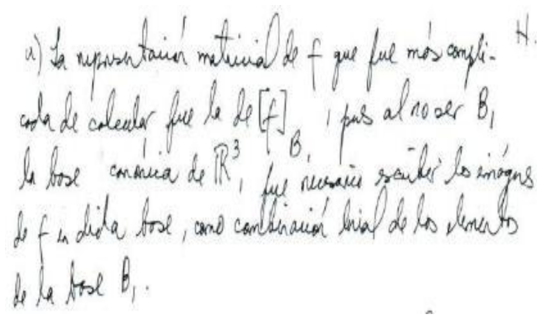
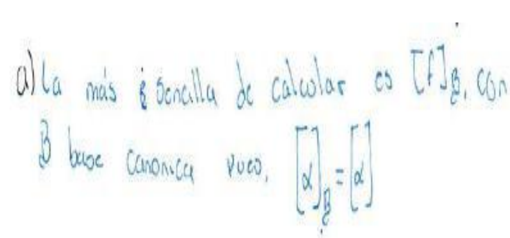
E2: ¡Ah!, bueno, acá… la representación matricial de f más complicada fue la correspondiente a B_1 ¿Por qué? Porque no era la base canónica y al no ser la base canónica, tuvimos que realizar este procedimiento [señaló, Figura 46] de escribir los vectores de la imagen que tuve como combinación lineal de los elementos de esa base.	**Figura 46** *Respuesta al Problema 18, Inciso a. E2*  "a) La representación matricial de f que fue más complicada de calcular fue la de $[f]_{B_1}$, pues al no ser B la base canónica de $\mathbb{R}^3$, fue necesario saber las incógnitas de f en dicha base, como combinación lineal de los elementos de la base B_1"

Tabla 3

Fragmento de Entrevista. Problema 18, inciso a. E3

Diálogo	Representación
E3: Escribió, Figura 47. E3: Entonces, la que fue más complicada de calcular fue esta [señaló, $[f]_{B_1}$]. E: ¿Por qué? E3: Porque aquí sí tuve que encontrar, los valores de los escalares para encontrar la combinación lineal de los vectores y aquí no, no como tal, porque, porque por ejemplo este [señaló $(6, 1, 3)$], este vector,	**Figura 47** *Respuesta al Problema 18, Inciso a. E3* 

como se ve como combinación lineal de la base canónica [señaló, $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$].	
E3: Como nada más tengo una entrada, para el primer vector, cumple que la primera entrada es distinta de cero y para los que siguen son ceros, entonces nada más depende del primer vector.	
E: Ya y la segunda entrada…	
E3: Es una vez este vector [señaló $(0,1,0)$].	
E: Ok.	
E3: Así con los demás.	
E: ¿Por qué fue más complicada?	
E3: Esta [señaló, $[f]_{B_1}$].	
E3: Porque, no lo puedo poner directamente como combinación lineal de un solo vector, tengo que ver como es la combinación lineal.	
E: A ver si le entendí, me estás diciendo que esta es más complicada de calcular porque aquí, tuviste que encontrar…	E3 reconoce a las columnas de $[f]_B$ como coordenadas de un vector respecto a una base.
E3: El valor de los escalares.	
E: Y en aquella no los tuviste que encontrar, bueno sí pero, como es la base canónica.	
E3: Es la base trivial.	
E: Ok.	
E3: Las coordenadas de cualquier vector en la base canónica es el mismo vector.	
E: ¿Supongo que te refieres a las entradas, no?	

E3: A los valores α, β, γ porque, esto no es poner el vector imagen, es poner las coordenadas del vector imagen en la base B_1.	
E: ¡Ah!	
E3: Este no es la imagen del vector, es las coordenadas de este vector [señaló la primera columna de la matriz $[f]_B$] en la base.	
E: Listo.	
E3: Es que T de cualquier base se construye con las coordenadas del vector de los vectores B en la base B prima.	

En el inciso (b) del problema 18, los estudiantes E1, E2 y E4 coinciden en que fue más conveniente la representación matricial de $[f]_{B_1}$ porque sería más fácil saber cómo actúa el operador lineal dado. En la Tabla 4 se exhibe como ejemplo de evidencia el fragmento de entrevista realizada a E2.

Tabla 4

Fragmento de Entrevista. Problema 18, Inciso b. E2

Diálogo	Representaciones
E2: Bueno, ya viendo en el mundo de las matrices al efectuar el producto de esta matriz con cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, el producto con esta matriz va a ser más fácil, porque, pues tiene más entradas cero [señaló, Figura 48].	
(…)	

E2: ¿Y qué? ¿Y qué? ¿Cuándo aquí preguntan qué es más conveniente?

E: Eso depende de ti, por qué para ti es más conveniente. Que te sea útil para algo.

E2: Porque viéndolo con la variante de que para llegar a está matriz fue más sencillo [señaló, Figura 48].

E2: Porque, puesto que estaba en la base canónica, tanto como en el dominio como el conjunto de llegada, por esa parte, fue más conveniente. Pero viéndolo [silencio].

E: Voy a tratar de recapitular tus ideas ¿Por la forma de calcular y llegar a la representación matricial de ese operador lineal, dices que sería la primera representación y ya cuándo se utiliza para los cálculos sería la segunda representación? ¿Algo así?

E2: Silencio. Seguro que al encontrarla está es la más conveniente porque fue la que menos cálculos implicó [señaló, Figura 49].

E: Ok.

E2: Sin embargo, si ya te la dieron, esta resulto, más conveniente, la de esta base [señaló, Figura 48].

Figura 48

Respuesta al Problema 18, Inciso b, Parte 1. E3

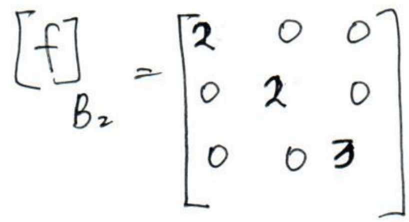
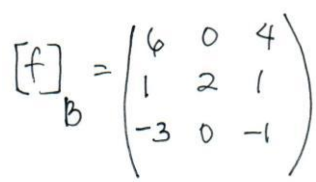


Figura 49

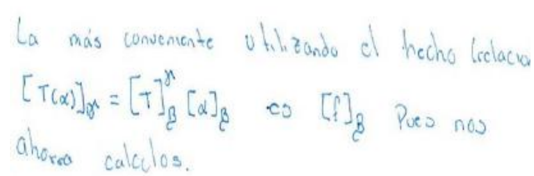
Respuesta al Problema 18, Inciso b, Parte 2. E3



E3 mencionó que la representación $[f]_B$ es más conveniente porque las representaciones del operador lineal $[f]_{B_1}$ y $[f]_B$ trabajan con coordenadas de vectores y al usar la representación $[f]_B$ no tendría que calcular las coordenadas del vector dado en la base B. En la Tabla 5 se muestra lo que expuso E3.

Tabla 5

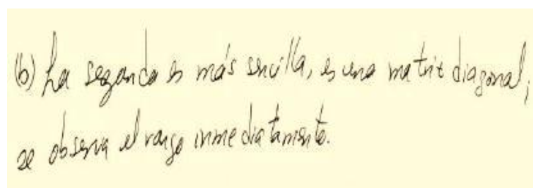
Fragmento de Entrevista. Problema 18, Inciso b. E3

Diálogo	Representación
E: Ya te estoy entendiendo, dices que la más conveniente es $[f]_B$ porque te ahorras cuentas, por ejemplo este cálculo. E3: Este y el otro [hace referencia a calcular $[\alpha]_B$] como considero la misma base, aquí porque ya tenía el valor de las coordenadas de la imagen, pero si no las hubiera tenido, tendría que hacer cálculos cuentas. E: Ok, esas representaciones que encuentras, tienen inversa, si nos pidieran encontrar ahora la inversa de esa transformación lineal, si es que existe, es decir, encontrar una transformación lineal que al componerlas me de la identidad, cuál de las dos representaciones utilizarías o cuál crees qué sería más conveniente. E3: Ya ve, depende para qué la vayas aplicar.	**Figura 50** *Respuesta al Problema 18, Inciso b, Parte 3. E3* 

En relación al inciso (b) del problema 18, E5 consideró que es más conveniente $[f]_{B_1}$, dado que, es la representación con más ceros y posteriormente escribió que la representación $[f]_{B_1}$ es una matriz diagonal e inmediatamente se identifica el rango, Tabla 6.

Tabla 6

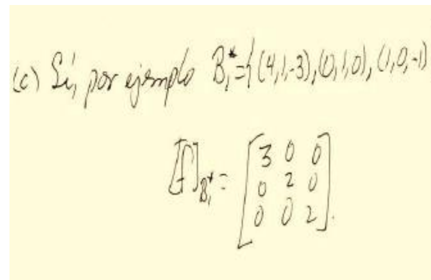
Fragmento de Entrevista. Problema 18, Inciso b. E5

Diálogo	**Representación**
E5: ¿Qué representación matricial de f te parece más conveniente y por qué? E: Conveniente en el sentido que te es útil para algo. E5: Bueno la segunda es más fácil porque tiene más ceros. E: Lo anotamos. E5: Por ejemplo, se observa el rango inmediatamente [escribió, Figura 51].	**Figura 51** *Respuesta al Problema 18, Inciso b. E5* 

En cuanto al inciso (c) del problema 18, los E1, E2, E3, E4 y E5 coinciden en que pueden determinar una base $B_2 \neq B_1$ tal que la representación matricial del operador lineal f, es decir $[f]_{B_2}$, sea diagonal. Por ejemplo, E1 y E5 coordinan los procesos de base ordenada y vector propio en el proceso base específica. Posteriormente, coordinan los procesos espacio vectorial, base específica y operador lineal en el proceso MATL y logran responder al inciso. En la Tabla 7 se muestra como ejemplo de evidencia lo que expuso E5.

Tabla 7

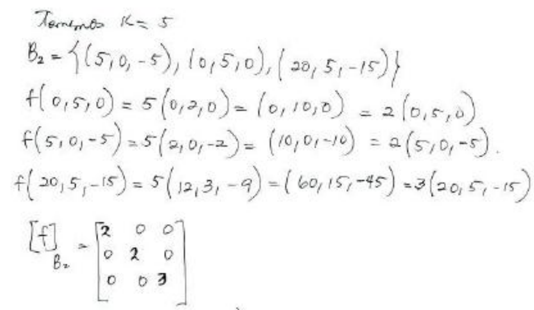
Fragmento de Entrevista. Problema 18, Inciso c. E5

Diálogo	Representación
E: ¿Qué pide el inciso c? E5: Que si existe otra base distinta de B_1, una B_2, tal que la representación para f sea diagonal. Justifica tu respuesta. Sí, por ejemplo si intercambio el tercero con el dos [se refirió a los vectores de la base B_1]. Los numeritos de en medio siempre van a ser los mismos [se refirió a los valores de la diagonal de $[f]_{B_2}$]. E: ¿Sí? ¿Por ejemplo esa base que estás dando es distinta a la base B_1? E5: ¡Aja! E: ¿Por qué? E5: Porque el orden influye, esta es diferente de aquella. Al representar esa matriz en esa, no me va a dar la misma [E5 consideró el orden en la base]. E: ¿Entonces las bases son distintas? ¿Por qué? E5: Porque el orden importa. Si cambio el orden cambia. […] E: Me podrías escribir cómo queda la representación matricial del operador lineal en esa base. E5: Supongo que va a quedar así [escribió, Figura 52].	**Figura 52** *Respuesta al Problema 18, Inciso c. E5* 

Por otro lado, para el inciso (c) del problema 18, los E2, E3, E4 lograron construir una base $B_2 \neq B_1$ considerando múltiplos de los vectores de la base propia dada. En la Tabla 8 se muestra como ejemplo de evidencia lo que expuso E2.

Tabla 8

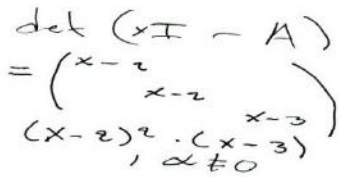
Fragmento de Entrevista. Problema 18, Inciso c. E2

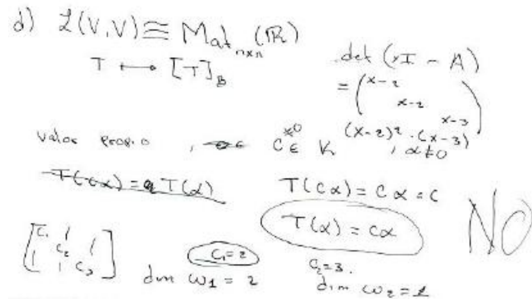
Diálogo	Representación
E2: Sí, pero siguen siendo proporcionales a aquellos. Estos son distintos pero tienen los mismos autovalores. E: ¿Cómo? E2: Es que por ejemplo, aquí el autovalor sería el 2 y el 3 (señaló, Figura 53). […] E: ¿Sí? E2: Cualquier otra base, que uno construya proporcional a esta que nos dieron originalmente, va a tener la misma representación matricial diagonal.	**Figura 53** *Respuesta al Problema 18, Inciso c. E2* 

En relación con el inciso (d) del problema 18, los participantes E1, E2, E3 y E5 lograron por medio de la coordinación 2 establecer que no se puede construir dicha base con las características requeridas, es decir, coordinan los procesos de operador lineal, matriz asociada a una transformación lineal, determinante en el proceso polinomio característico. En la Tabla 9 se exhibe como ejemplo de evidencia lo que realizó E3.

Tabla 9

Fragmento de Entrevista a E3: Evidencia de la Coordinación 2

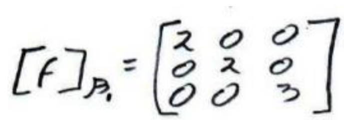
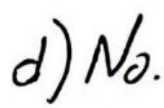
Diálogo	Representaciones
E: Ok. E: Si yo te dijera cómo encontraría esa c en esa igualdad ¿Se pueden encontrar esas c? [Señaló, Figura 54] E3: Sí, se saca el determinante $\det(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$. Así se sacan los c [escribió $(x-2)^2(x-3)$, Figura 54. E3 explicó cómo se obtienen los valores propios] […] E3: ¡Ajá!, se sacan las raíces… E: Entonces sí se puede… E: En la “d” qué nos pide… Ah encontrar una base distinta a la que nos dan de tal forma que se encuentre una representación matricial con valores distintos a la que nos dio ¿Eso es posible? E3: No. E: ¿Por qué ahora no? E3: Porque las raíces del polinomio deben de coincidir. E: ¿Las raíces del polinomio deben de coincidir? E3: Los c son las raíces de este polinomio [señaló $(x-2)^2(x-3)$]. […]	**Figura 54** *Respuesta al Problema 18, Inciso d, Parte 1. E3* 

Diálogo	Representaciones
E: ¿Los c son qué? No es cualquier número. ¿Qué son? E3: Las raíces del polinomio que obtuve con este. Tendríamos más raíces ahí… es que si tenemos escalares distintos también tendríamos subespacios a esos escalares distintos y la dimensión sería más grande que la de $\mathbb{R}^3$. E: Ok, entonces por eso no se podría. E3: Me quedo con eso [señaló, Figura 55].	**Figura 55** *Respuesta al Problema 18, Inciso d, Parte 2. E3* 

Por su parte, E4 en el inciso (d) del problema 18 mencionó que no puede dar otra base $B_2 \neq B_1$ tal que la representación matricial del operador lineal dado en esa base, sea diagonal y los valores sean distintos en la diagonal a la matriz $[f]_{B_1}$. E4 con su estructura proceso de base ordenada consideró que la única posibilidad de que la representación matricial del operador dado sea diagonal es considerar otro orden en la base B_1, dado que, E4 afirma que sólo se podría obtener la representación matricial $[f]_{B_1}$ con múltiplos de la base B_1 o dando otro orden en la base, se muestra evidencia en la Tabla 10.

Tabla 10

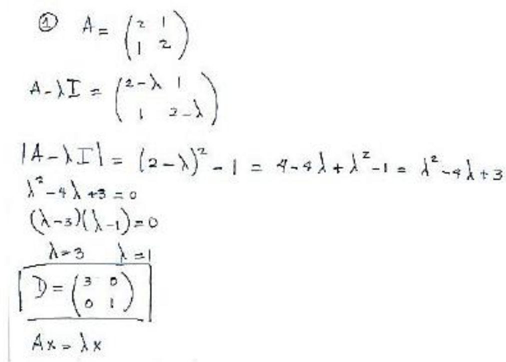
Fragmento de Entrevista. Problema 18, Inciso d. E4

Diálogo	Representaciones
E4: Es que para cada base va a existir una matriz asociada diferente. E: Ok. Pero según lo que escribiste anteriormente es que, si se toman múltiplos de esa base, la representación matricial asociada a esa base va a ser… E4: Igual, si cogemos la misma y le cambiamos la posición a los vectores, el orden a los vectores de la base y ya sería otra matriz ordenada [se refirió a otra base ordenada] y me daría lo mismo. E: ¿Te da esa? [Señaló, Figura 56] E4: Me debe dar esa… ¿No? E4: Escribió, Figura 56.	**Figura 56** *Respuesta al Problema 18, Inciso d, Parte 1. E4*  **Figura 57** *Respuesta al Problema 18, Inciso d, Parte 2. E4* 

En cuanto al problema 19, el E2 evocó a su esquema-OLD y no tiene problema para determinar los valores propios mediante la coordinación 2. Para lograr esta coordinación el estudiante necesitó trabajar con la matriz de tamaño 2×2, es decir, $\boldsymbol{A} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, luego con su estructura proceso de determinante logró calcular el $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ con el objetivo de construir el polinomio característico $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ asociado a $\boldsymbol{A}$. Después, E2 mencionó que en la diagonal de la matriz $\boldsymbol{D}$ se ponen los valores propios que encontró. A continuación, E2 consideró construir la matriz $\boldsymbol{P}$ como la matriz de cambio de base, a pesar que el problema no expone quienes son las bases ni el espacio vectorial dado, Tabla 11.

Tabla 11

Fragmento de Entrevista a E2: Evidencia de la Coordinación 2

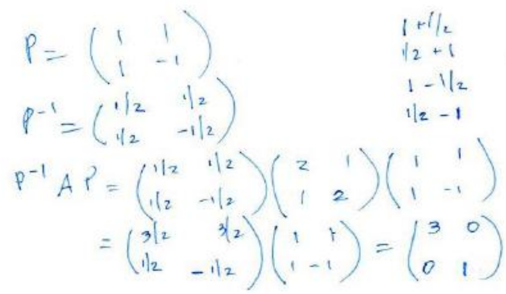
Diálogo	**Representación**
E: ¿Se entiende lo que pide el primer problema? E2: Se debe diagonalizar esta matriz [señaló la matriz $\boldsymbol{A}$]. E: ¿Eso qué significa? E2: Encontrar los valores propios, los autovalores y formar mmm… son los que van en la diagonal principal y cero en los demás elementos. E: Ok. E2: Entonces [suspira]. E: ¿Qué haces? ¿Qué vas a hacer? E2: Voy a encontrar los autovalores como las raíces del polinomio característico. E2: ¿Esta sería la definición no? Digamos de autovalor [señaló, $\boldsymbol{A}x = \lambda x$]. E: ¿De autovalor? E2: Un escalar tal que la matriz $\boldsymbol{A}$ por el vector propio es igual al autovalor por el vector, para x distinto de cero. Porque en si esta $\boldsymbol{P}$ [señaló el problema 19] es la que se forma con esos vectores del cambio de base o lo que es lo mismo con los autovectores. E: Ok ¿Entonces el primer problema nos pide? ¿Qué nos pide? Encontrar una matriz $\boldsymbol{D}$ diagonal y una matriz	**Figura 58** *Respuesta al Problema 19, Parte 1. E2* 

Diálogo	Representación
invertible $\boldsymbol{P}$ que satisface eso [señaló $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$] y nos dan la matriz $\boldsymbol{A}$. Y me dices que como piensas encontrar esa $\boldsymbol{D}$ y esa $\boldsymbol{P}$. E2: $\boldsymbol{D}$ la encontré a partir de las soluciones de las raíces del polinomio característico asociado a $\boldsymbol{A}$ [señaló, Figura 58]. E: ¿Ya la encontraste? E2: Sí.	
E: Listo, ok. Ya tienes a $\boldsymbol{D}$ ¿Ahora quién es $\boldsymbol{P}$? E2: $\boldsymbol{P}$ es la matriz de cambio de base asociada, digamos, para cambiar de esta base $\boldsymbol{A}$ [señaló, $\boldsymbol{A}$] a $\boldsymbol{D}$ [señaló la matriz $\boldsymbol{D}$].	E2 mencionó que $\boldsymbol{P}$ es una matriz de cambio de base, a pesar de que el problema no expone quiénes son las bases ni el espacio vectorial, quizá en sus estructuras tiene una que relaciona la matriz de cambio de base y la matriz dada con la relación $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

Posteriormente, E2 tuvo dificultad para determinar la matriz $\boldsymbol{P}$, el investigador decidió continuar con el problema 22, esto porque los problemas 19, 20, 21 tienen que ver con la situación matemática de dada la matriz encontrar si es semejante a una matriz diagonal. Con la orientación del investigador E2 logró resolver el problema 22 y regresó al problema 19 a contestar lo que se pide, dando evidencia de la coordinación 5, Tabla 12.

Tabla 12

Fragmento de Entrevista a E2: Evidencia de la Coordinación 5

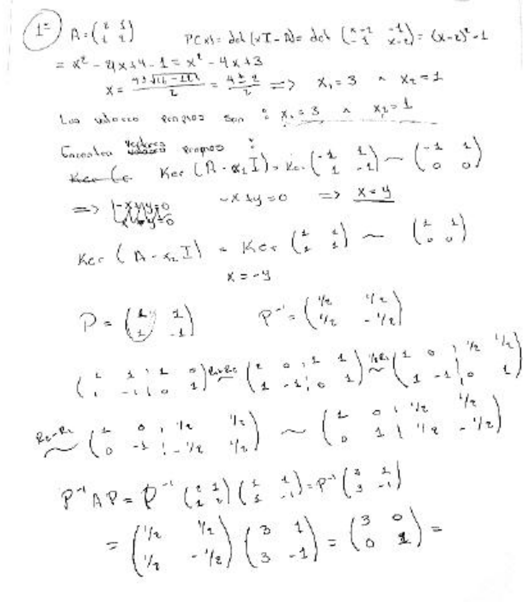
Diálogo	Representación
E: ¿Quién es $\boldsymbol{P}^{-1}$? E2: $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. E: Listo ¿Si encontraste $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$? E2: Ahora sí [escribió, Figura 59].	**Figura 59** *Respuesta al Problema 19, Parte 2. E2* 

En el problema 19, E3 tuvo claro lo que se pedía. E3 evocó al esquema-OLD y logró determinar el polinomio característico asociado a la matriz dada mediante la coordinación 2. Posteriormente, muestra evidencia de manera implícita de la coordinación 3. Para lograr esta coordinación, el estudiante analizó el polinomio característico de la matriz $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = x^2 - 4x + 3$ y logró determinar sus raíces ($\lambda = 3 \wedge \lambda = 1$) las cuales se deben considerar como valores propios que cumplen la igualdad $O(x) = \lambda x$ con $x \neq 0$. Después, por medio de la coordinación 6 logró responder el problema, Tabla 13.

Tabla 13

Fragmento de Entrevista a E3: Coordinaciones 2, 3 y 6

Diálogo	Representación
E: ¿Qué estás haciendo? E3: Según yo, encontrar esto [señaló $\boldsymbol{D}$, en el problema 19] esta matriz diagonal es con respecto a los valores propios de $\boldsymbol{A}$. E: Ok.	**Figura 60** *Respuesta al Problema 19. E3*

Diálogo	Representación
E3: Entonces…según yo…	
E: Encontraste los valores propios.	
E3: ¡Aja!	
E: ¿Cómo los encontraste?	
E3: Según yo es el $\det(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$. Encontrar los ceros de ese polinomio.	
E: ¿Ya los tienes?	
E3: Ya, es x_1 y x_2. Ahora lo que voy a hacer es, encontrar los vectores propios asociados a x_1 y x_2.	
E: Ok ¿Entonces, la matriz $\boldsymbol{D}$ ya me la puedes dar?	
E3: En teoría tendría que ser $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y ahora tengo que encontrar los vectores propios.	
E: ¿En qué parte vas?	
E3: Estoy encontrando la $\boldsymbol{P}$ [escribió, Figura 60].	
[…]	
E3: ¡Aja!	
E: ¿Cómo encontraste esa $\boldsymbol{P}$ y esa $\boldsymbol{D}$?	
E3: En las columnas coloco los vectores propios asociados a los valores propios. Luego encuentro la inversa.	
E: Por ejemplo, para el valor propio 3, dame un vector propio que esté asociado a ese valor.	
E3: Cualquier vector que cumple esto $x = y$ en particular, puse el $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.	

Diálogo	Representación
E: ¿Para el otro? E3: Es que $x = -y$, y puse $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El primero es asociado al tres y el segundo al uno. E: Encontraste la matriz $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$.	

En el problema 19, E4 tuvo claro qué pide el problema, no así, lo que tiene que hacer para determinar la matriz $\boldsymbol{P}$ y la matriz $\boldsymbol{D}$, es decir, no logró establecer alguna relación entre sus estructuras, se muestra evidencia en la Tabla 14.

Tabla 14

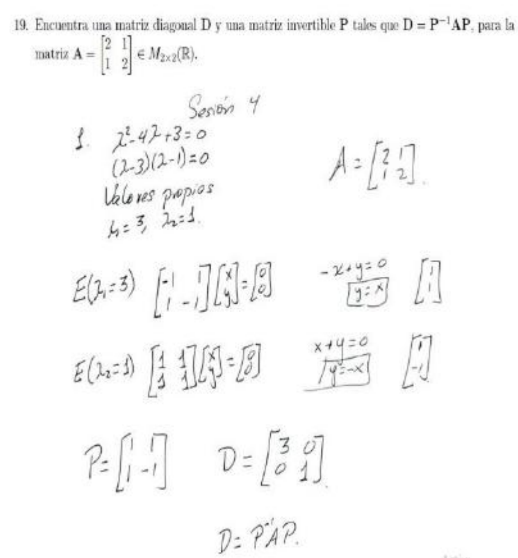
Fragmento de Entrevista. Problema 19. E4

Diálogo	Representación
E4: Y esta la hallo, hallando la inversa de esta [señaló la matriz $\boldsymbol{P}$, en el problema 19] y ya de ahí nada más hago esta operación y ya encuentro $\boldsymbol{D}$. E: Me puedes repetir cuál es la idea. E4: Hay que encontrar las dos, según esto. E: Alguna idea para encontrar esa $\boldsymbol{D}$ y esa $\boldsymbol{P}$. E4: No. E: El punto dos ¿En el punto dos qué pide? E4: Decidir si es diagonalizable o no. E: ¿Recuerdas qué significa eso? ¿Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ esta sea diagonalizable? E4: No recuerdo eso.	E4 acepta que no recuerda el tema de diagonalización de una matriz.

Por otro lado, para el problema 19. E5 al evocar su esquema-OLD, primero exteriorizó las coordinaciones 1, 2 y 6. Posteriormente, estableció la coordinación de los procesos valor propio, vector propio, conjunto solución de un sistema de ecuaciones y conjunto generador en el proceso espacio propio, es decir, estableció los espacios propios asociados a los valores propios, coordinación 3. Después, mencionó que las columnas de la matriz ***P*** se forman con los vectores de las bases de los subespacios propios (ver Tabla 15). En este caso que los valores propios asociados a la matriz son distintos E5 logró diagonalizar la matriz, se muestra evidencia en la Tabla 15.

Tabla 15

Fragmento de Entrevista. Problema 19. E5

Diálogo	Representación
E: ¿Qué es lo que estás haciendo? E5: Hallando las bases de los subespacios propios. Que van a ser las columnas. E: ¿Las bases de los subespacios propios? E5: Sí, las bases de los subespacios propios. E: ¿Cómo se encuentra esa ***P***? E5: Son las columnas de los vectores de las bases de los subespacios propios. O sea, son las columnas [señaló, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$] de los vectores, de las bases de cada espacio propio… o sea, esto es una base [señaló, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$] del subespacio	**Figura 61** *Respuesta al Problema 19. E5* 

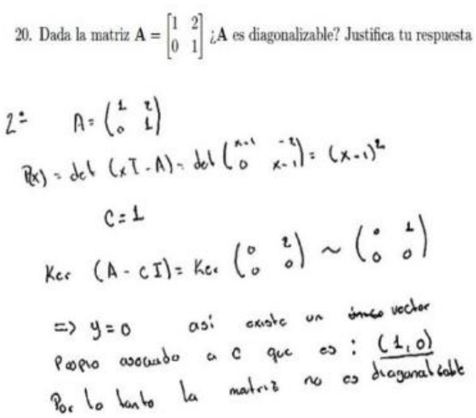
propio, asociado al valor propio 3, este es 1, 1 y este 1 y -1 y son las columnas de $\boldsymbol{P}$ en el mismo orden que los voy a poner aquí en la $\boldsymbol{D}$ [escribió, $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$] y se podría comprobar que efectivamente $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ donde $\boldsymbol{A}$ es este [escribió $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$].	

Por otra parte, E3 y E5 en el problema 20 donde se da una matriz 2×2 con un valor propio que tiene multiplicidad algebraica igual a dos y se pregunta si es diagonalizable, lograron coordinar los procesos de multiplicidad algebraica y geométrica en el proceso OLD (ver Figura 62). Por ejemplo, E3 al evocar su esquema-OLD mencionó que la matriz no se puede diagonalizar porque al tener un solo valor propio, él debe poder encontrar dos vectores propios, esto es, la multiplicidad algebraica del valor propio debe coincidir con la multiplicidad geométrica del espacio propio asociado a ese valor propio (ver Tabla 16).

Tabla 16

Fragmento de Entrevista. Problema 20. E3

Diálogo	Figura
E: Nos pide algo similar ¿No? E3: Sí, si es o no diagonalizable. E: ¿Y qué tengo que hacer? E3: Encontrar los valores propios y encontrar si tiene la misma cantidad de vectores propios. Si sólo hay un valor propio debería haber dos vectores propios asociados.	

Diálogo	Figura
E: A ver… E3: El valor propio es $x = 1$. Se supone que no. E: ¿Por qué esa matriz no es diagonalizable? E3: Porque solo tiene un valor propio y ese valor propio solo tiene asociado un vector propio. Según yo recuerdo debería tener dos o descomponerse en dos para que fuera diagonalizable (ver Figura 62).	**Figura 62** *Evidencia de la Coordinación 4. E3* 

Además, se le preguntó a E5 por qué no se puede diagonalizar la matriz del problema 20 (ver Figura 63) si la multiplicidad algebraica y geométrica no coinciden, entonces E5 mostró evidencia de coordinar los procesos multiplicidad geométrica y algebraica en el proceso operador lineal diagonalizable (coordinación 5). Posteriormente, trató de justificar que al no coincidir la multiplicidad algebraica del valor propio con la multiplicidad geométrica asociada al valor propio no se puede construir una base en la cual la representación del operador fuera una matriz diagonal, pero al reflexionar que tenía una matriz justificó porqué la matriz dada no es similar a una matriz diagonal (ver Tabla 17).

Tabla 17

Fragmento de Entrevista. Problema 20. E5

E5: Como son diferentes ya no es diagonalizable [se refirió a la multiplicidad algebraica y geométrica, ver Figura 63].

E: ¿Por qué son diferentes? ¿Cómo justificas que si la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica son diferentes el operador lineal ya no es diagonalizable?

E5: Bueno, porque sólo va a existir un vector propio linealmente independiente asociado al valor propio ese (señaló, $\lambda = 1$), como es el único me haría falta otro.

E: ¿Para qué quieres otro vector?

E5: Para construir una base para que ese operador lineal tenga una forma diagonal.

E: Ok. Fíjate, aquí es una matriz.

E5: Ok.

E: ¿Por qué me dices que esa matriz $\boldsymbol{A}$ no es diagonalizable? Lo que me acabas de decir te lo creo si tuvieras el operador lineal en su forma funcional, no podría construir una base tal que…

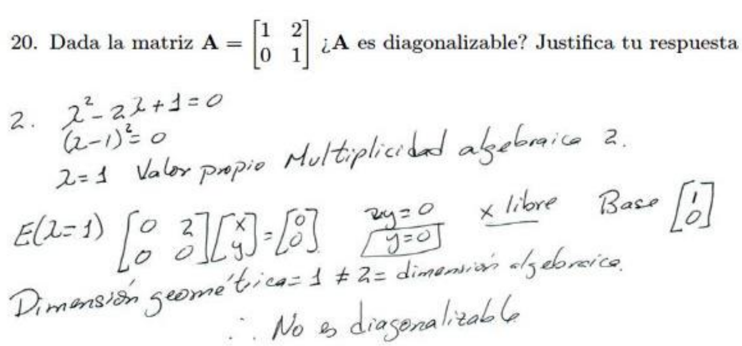
E5: Bueno, en este caso no existe una matriz $\boldsymbol{P}$ como dice arriba [señaló, $\mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$]. No puedo construirla con un vector propio.

E: Entonces es porque no puedes construir una matriz $\boldsymbol{P}$ que cumpla con eso.

E5: Ajá, un vector sólo sería una columna de la matriz y necesito al menos dos, pero linealmente independientes.

Figura 63

Evidencia de la Coordinación 5. E5



20. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ¿**A** es diagonalizable? Justifica tu respuesta

2. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda = 1$ Valor propio Multiplicidad algebraica 2.

$E(\lambda=1)$ $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $2y = 0$ $\boxed{y=0}$ x libre Base $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

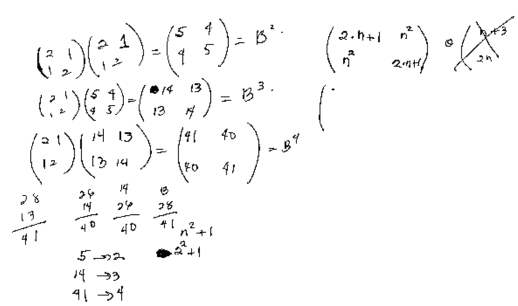
Dimensión geométrica $= 1 \neq 2 =$ dimensión algebraica.

$\therefore$ No es diagonalizable

En el problema 21, los estudiantes E1, E2, E3, E4 no respondieron ni usaron el que la matriz dada es diagonalizable. Por ejemplo, E2 buscó encontrar una regularidad al hacer varias veces el producto de la matriz $\boldsymbol{A}$ con ella misma, es decir, no se logró la tematización de su esquema-OLD, Tabla 18.

Tabla 18

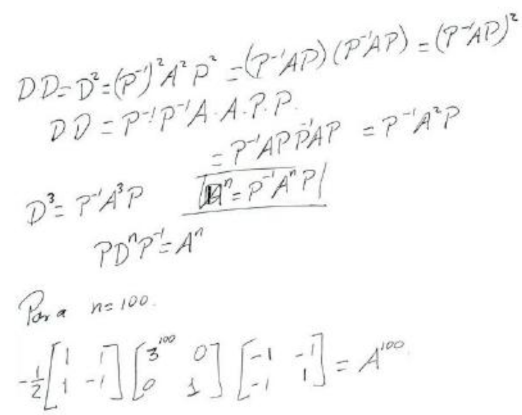
Fragmento de Entrevista. Problema 21. E2

Diálogo	Representación
E: Para completar la idea, te doy esta matriz y pedimos lo mismo calcular $\boldsymbol{B}^{100}$. E2: Comienza a escribir E2: Ya aquí no hay. E: ¿Qué pasó? [Silencio] E: ¿Qué está haciendo? E2: Estoy tratando de encontrar la regularidad (Figura 64). E: ¡Ajá! Bueno esa sería una manera ¿No? Bueno el punto que interesa es la del ejercicio uno y se supone que es diagonalizable ¿Eso te ayuda en algo? E2: ¿Cómo? E: Está matriz $\boldsymbol{B}$ es la del ejercicio uno y es diagonalizable y te pregunto que si eso te ayuda en algo. E: ¿Sí, no? E2: No recuerdo.	**Figura 64** *Respuesta al Problema 21. E2* 

Por otra parte, en el problema 21. E5 evocó a su esquema-OLD y utilizó que la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable para establecer $\boldsymbol{A}^{100}$, es decir por medio del mecanismo tematización logró concebir como un objeto a los operadores lineales diagonalizables, Tabla 19.

Tabla 19

Fragmento de Entrevista. Problema 21. E5

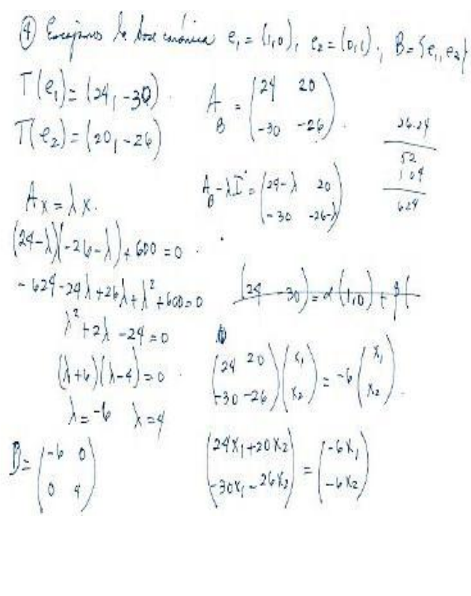
Diálogo	Representación
E: Te doy una pista, la matriz $\boldsymbol{A}$ es la matriz del primer ejercicio. E5: Sí, y es diagonalizable. E: ¿En qué me podría ayudar que esa matriz es diagonalizable? E5: Bueno que se cumple eso (señaló, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$) por ejemplo…. Digamos si hiciera esto al cuadrado… (Señaló, $\boldsymbol{D}$) E: ¿Cuánto te queda? E5: hace cuentas. E5: Es esto (señaló, $\boldsymbol{DD} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$) E: Eso es ¿Ahora $\boldsymbol{D}$ al cubo cuánto te queda? E5: Eso da el producto de eso y en general. Por lo tanto para $n = 100$ (escribió, Figura 65).	**Figura 65** *Respuesta al Problema 21. E5* 

En cuanto al cálculo de la matriz $\boldsymbol{A}^{100}$ con $\boldsymbol{A}$ diagonalizable, solo E5 logró utilizar su esquema-OLD y darle solución al problema. Esta forma de proceder de E5 muestra que se aplicó una acción sobre el esquema-OLD, es decir, él tematizó su esquema-OLD.

En el problema 22, E2, E3 y E4 respondieron de manera similar. Se muestra como ejemplo lo que ha realizado E2. Primero, él con su concepción proceso de base ordenada proporcionó una para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Segundo, E2 mencionó que el problema se reduce al análisis de diagonalización de la representación matricial, Tabla 20. Además, E2 mostró evidencia que las coordinaciones 1 y 2 son parte de su esquema-OLD. E2 mostró evidencia de establecer su coherencia del esquema-OLD de la siguiente manera: un operador lineal dado es diagonalizable si la representación matricial del operador lineal respecto a una base es diagonalizable, Tabla 20.

Tabla 20

Fragmento de Entrevista. Problema 22, Parte 1. E2

Diálogo	Representación
E: Te da un operador. ¿Y ese operador dónde está? E2: De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, el espacio vectorial. E: Ok, y ya te pregunta si ese operador es diagonalizable. ¿Qué significa? Tú mencionaste un poco. E2: Dada una base, o sea, encuentra una matriz asociada a ese operador y si esa matriz es diagonalizable, entonces ese operador es diagonalizable. E: Bueno al menos aquí ya tienes más elementos, tienes espacios vectoriales, y tienes un operador, ya en este caso como tienes espacios vectoriales puedes ocupar toda la teoría de espacios vectoriales que te sepas.	**Figura 66** *Respuesta al Problema 22, Parte 1. E2* 

E2: ¡Aja!
E: ¿Cómo hacerle para…?
E2: No sé, cojamos la base canónica [escribió, $B = \{e_1, e_2\}$].
E: ¿Ok, y ahora qué tienes?
E2: Se reduce al análisis de la diagonalización de esta matriz [señaló $\boldsymbol{A}_B$, en la Figura 66].

Posteriormente, E2 ya consideró que busca los vectores distintos de cero ($x \neq 0$) en la relación $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, y logró determinar los vectores propios. Además, él mostró evidencia de una estructura proceso de vector propio, dado que, mencionó que para determinar más vectores propios asociados al valor $\lambda = -6$, tienen que ser proporcionales a $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, Tabla 21.

Tabla 21

Fragmento de Entrevista. Problema 22, Parte 2. E2

Diálogo
E: A ver, ya tenemos calculados los valores propios -6 y 4, ahora nos faltan los vectores propios. ¿Recuerda cómo se calculan? Recordemos qué es un vector propio.
E2: Un vector distinto de cero que satisface esta relación ($\boldsymbol{A}x = \lambda x$).
E: Ok, más aún, ya tenemos ese λ, bueno ya encontraste ese λ ahora podrías dar un vector propio asociado, al valor propio -6.
E: ¿Eso sería uno? ¿Sí, verificó? ¿Sí sale?
E2: Verificamos… (Escribió, Figura 67).
E: Ahora sí.
E2: Ya.
[…]
E: ¿Sí satisface?

E2: Sí.

E: Bueno ya tienes uno. ¿Pero de esos hay varios?

E2: Cualesquiera que esté en esta proporción (señaló, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en la Figura 67).

E: Ya tienes uno ¿Cómo encuentras otro?

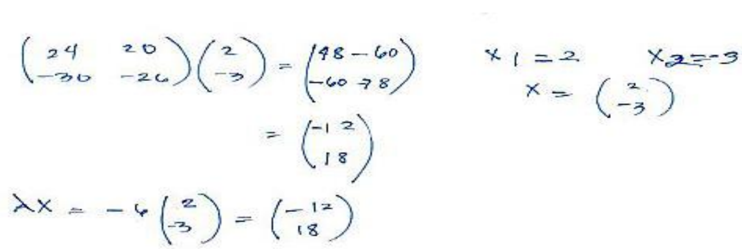
E2: ¿Asociado a este mismo autovalor?

E: Bueno para el otro autovalor, porque para este ya me dijiste que sí tiene la misma proporción.

Representación

Figura 67

Respuesta al Problema 22, Parte 2. E2



Consecutivamente, el investigador consideró necesario proporcionar la definición de operador lineal diagonalizable en el sentido de Hoffman y Kunze (1973, p. 183), esto porque el estudiante mostró evidencia de tener dominio acerca de las estructuras previas con la finalidad de que E2 logre construir una base propia pero E2 prefirió utilizar la definición de Friedberg et al. (1982, p 233), Tabla 22.

Tabla 22

Fragmento de Entrevista. Problema 22, Parte 3. E2

Diálogo	Representaciones
E: Te pregunto esto porque, no perdamos el foco. ¿Qué estás buscando? E2: La matriz invertible.	

E: Esa es una, la otra es, si existe una base, en este caso, quien es T, va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, si existe una base de $\mathbb{R}^2$, donde cada vector suyo formen una base para decir que ese operador es diagonalizable, ¿Puedes construir una base, cuántos vectores necesitas para formar una base en $\mathbb{R}^2$?

E2: Dos.

E: ¿Con el otro autovalor podrás encontrar otro vector propio?

E2: Que sea linealmente independiente… ¡Aja!… y por tanto T sería diagonalizable.

E: Exacto, si se logra hacer eso.

E2: Ya [escribió, Figura 68].

[…]

E: Encontraste otro, ok. ¿Ya comprobaste que es vector propio?

E2: No.

E: Supongamos que sí ¿No?

E2: Es la matriz $\boldsymbol{P}$ formada por los vectores columnas que son los autovectores… [Escribió, Figura 69].

E: ¿Y ya? Tú tienes a $\boldsymbol{P}$ ¿Y esa $\boldsymbol{P}$ para qué?

E2: Para buscar su matriz invertible.

E: Ok.

E2: Y ya sí..., Ya te quedaría similar a esa (señaló, $\boldsymbol{D}$ en la Figura 66).

Figura 68

Respuesta al Problema 22, Parte 3. E2

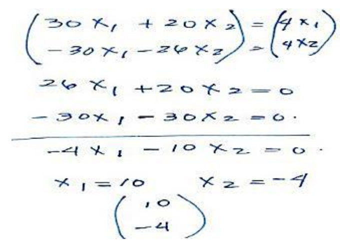
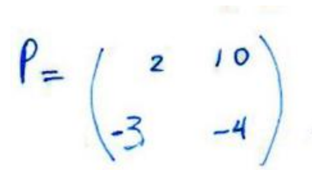


Figura 69

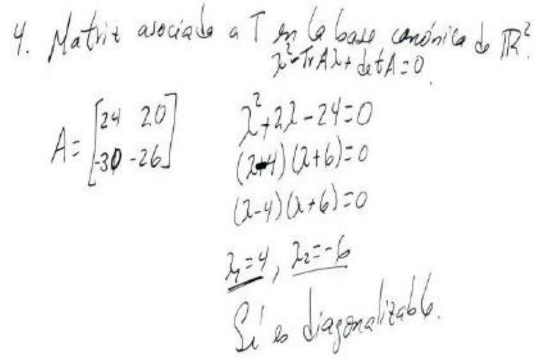
Respuesta al Problema 22, Parte 4. E2



En relación con el problema 22, E5 evocó al esquema-OLD y estableció las coordinaciones 1 y 2, es decir, logró coordinar los procesos de espacio vectorial, operador lineal, base ordenada por medio del proceso matriz asociada al operador lineal y coordinó los procesos de espacio vectorial, operador lineal, base ordenada, matriz asociada a una transformación lineal y determinante en el proceso de polinomio característico asociado al operador lineal. Posteriormente, empezó a dar evidencia de la coherencia de su esquema-OLD, para esta cuestión mencionó que el operador lineal dado es diagonalizable y su argumento fue porque el operador lineal tiene asociados dos valores propios y distintos por tanto el espacio propio tiene dimensión igual a la multiplicidad algebraica o mayor, aunque esta afirmación es falsa porque la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad algebraica, Tabla 23.

Tabla 23

Fragmento de Entrevista. Problema 22. E5

<table>
<tr><th>Diálogo</th><th>Representación</th></tr>
<tr><td>E: ¿Qué estás haciendo?
E5: Hallar el polinomio característico.
E: ¿Pero qué hizo?
E5: Hice la traza por el determinante.
E: ¿Y esa matriz A?
E5: Es la asociada a la transformación lineal.
E: ¿Qué es lo que hizo para encontrar la A?
E5: Evalué en la base canónica y lo puse como columna. Ya.
E: ¿Es o no diagonalizable?
E5: Sí [escribió, Figura 70].
E: ¿Qué hizo? ¿Por qué?
E5: Porque los valores propios son diferentes y son dos.</td><td>Figura 70
Respuesta al Problema 22. E5

</td></tr>
</table>

E: ¿Y eso qué?

E5: O sea, obligada la multiplicidad geométrica de este es uno y de este uno [señaló, $\lambda = 4, \lambda = -6$]. La multiplicidad geométrica siempre es igual o mayor a la algebraica.

E: ¿Entonces es diagonalizable?

E5: O sea, la aplicación.

E: Ok ¿Pero por qué?

E5: Porque tiene todos los valores propios diferentes.

E: En este caso son 4 y -6.

E5: ¡Aja!

E: ¿Pero qué me garantiza que el operador lineal lo pueda diagonalizar?

E5: Porque el espacio propio asociado a este [señaló, $\lambda = 4$] te va dar uno. Y el de este [señaló, $\lambda = -6$].

E: Ok.

E5: Igual eso lo escriben como teorema, si son diferentes es diagonalizable [se refirió a los valores propios].

En el problema 23 (Figura 71), el cual considera un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ con dos valores propios, un valor propio con multiplicidad algebraica igual a dos y se cuestionó si es diagonalizable. E3 primero estableció las coordinaciones 1, 2, 3 y 4. Posteriormente, consideró que el operador lineal es diagonalizable al comparar el número de valores propios con los vectores propios y la posibilidad de construir las matrices $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$ de la igualdad $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. En el esquema-OLD de E3 un operador lineal es diagonalizable si la representación matricial del operador lineal respecto a una base es diagonalizable. Finalmente, E3 mostró una manera de utilizar con éxito su estructura esquema-OLD y decidir cuándo un operador lineal es diagonalizable, es decir, la coherencia de su esquema-OLD se basó en el hecho de que la multiplicidad algebraica del valor propio debe coincidir con la multiplicidad geométrica del espacio propio asociado a dicho valor propio (Tabla 24).

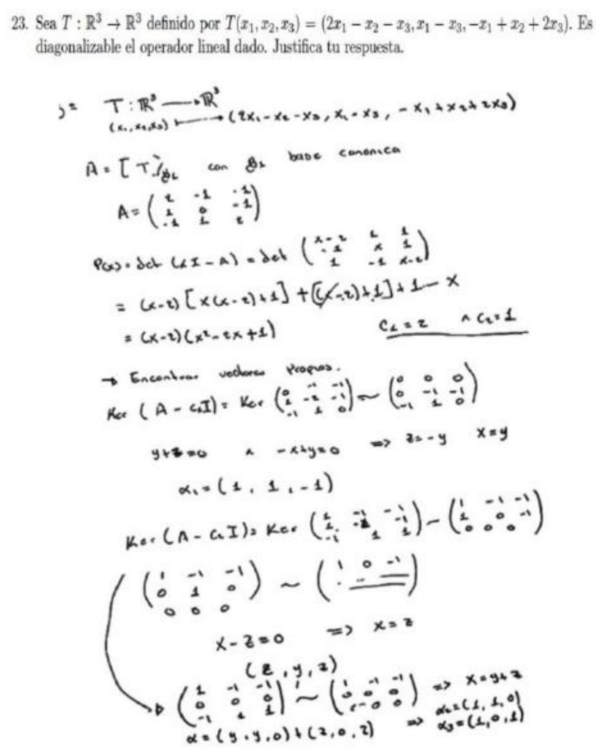
Tabla 24

Fragmento de Entrevista. Problema 23. E3

<table>
<tr><th>Diálogo</th><th>Figura</th></tr>
<tr><td>
E: ¿Qué vas a hacer para responder?
E3: Lo mismo que hice en el cuatro.
E: ¿Es decir?
E3: Poner el operador lineal como matriz, la matriz asociada al operador lineal T usando la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Encontrar sus valores y vectores propios.
E: ¿Cuántos valores propios tiene?
E3: Dos.
E: ¿Cuántos vectores propios encontraste?
E3: Tres, entonces sí es diagonalizable.
E: ¿Por qué?
E3: Porque puedo construir $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$.
E: Ya para terminar, si me preguntan ¿Este operador lineal es
</td><td>

Figura 71

Evidencia de la Coordinación 1, 2, 3 y 6. E3



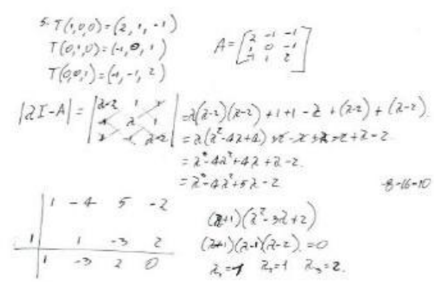
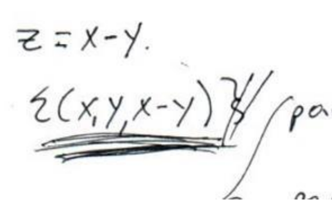
</td></tr>
</table>

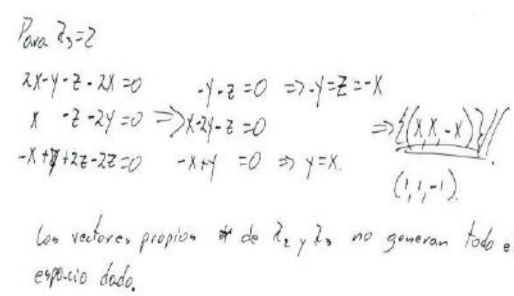
diagonalizable? ¿Qué tengo que hacer para decidir si lo es?
E3: Primero representar el operador como matriz, utilizando las bases. Encontrar los valores propios y los vectores propios, se supone que se debe cumplir que la dimensión de la imagen $\mathbb{R}^3$ debe coincidir con la suma de los espacios propios, por eso tienen que ser tres vectores para que sea de dimensión tres, si encuentras sólo dos, entonces la suma de las dimensiones sería dos. Mejor dicho, cuando coincida la dimensión algebraica [se refiere a la multiplicidad algebraica] con la dimensión del espacio generado por los vectores propios. El espacio propio asociado sería el generado por c_2 y como son dos la dimensión sería dos que es la multiplicidad de c_2 [ver Figura 71].

En relación al problema 23, E4 mencionó que es muy similar al problema 22 y se debe determinar si es posible construir una base cuyos vectores sean propios. Primero, E4 mostró evidencia de las coordinaciones 1, 2 y 3. Segundo, E4 mencionó que no es posible construir dicha base, dado que, los vectores asociados a los valores propios no formarían una base, es decir, la coherencia de su esquema-OLD fue sobre la base de que los vectores propios asociados a los valores propios no generan todo el espacio dado. Él mencionó en la entrevista implícitamente que uno de los valores propios tendría que tener más de un vector propio linealmente independiente y de esta forma poder construir la base, es decir, que la multiplicidad algebraica y geométrica coincidan, Tabla 25.

Tabla 25

Fragmento de Entrevista. Problema 23. E4

Diálogo	Representaciones
E4: El cinco es el mismo pero ahora con $\mathbb{R}^3$. E: En el ejercicio cinco ¿Qué está haciendo para resolverlo? E4: Lo mismo, hallo la matriz $\boldsymbol{A}$. E: ¿Quién es la matriz? E4: La matriz asociada a esa transformación. E: ¿Y? E4: Hallé los valores propios. E4: Voy a tener que volver a hallar los vectores propios y voy a ver si puedo hallar una base, que esa base sean vectores propios [escribió, Figura 72]. E: Según la definición que te mencioné, es decidir si existe una base cuyos vectores propios, obviamente, la base del espacio dado, sean todos propios. E4: Los vectores propios no generan todo el espacio dado. E: ¿Entonces no se puede construir esa base?	**Figura 72** *Respuesta al Problema 23, Parte 1. E4*  **Figura 73** *Respuesta al Problema 23, Parte 2. E4* 

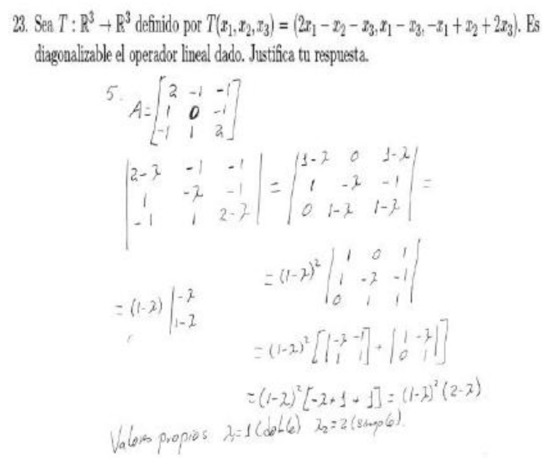
Diálogo	Representaciones
E4: ¿Con elementos de…? Tengo tres vectores linealmente independientes. E: ¿Entonces eso ya es una base? E4: Sí, pero me generan los vectores de este tipo [señaló, Figura 73]. E4: Los demás vectores quedan en el aire, entonces no me genera todo. E: ¿Entonces no es base? E4: No [escribió, Figura 74]. E: Listo.	**Figura 74** *Respuesta al Problema 23, Parte 3. E4* 

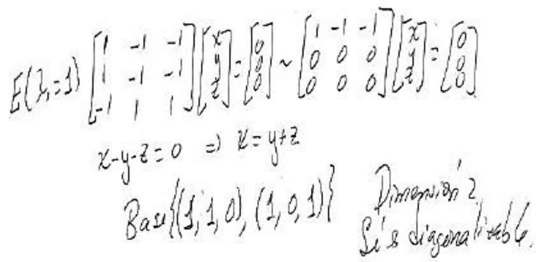
En el mismo problema 23, E5 al evocar a su esquema-OLD estableció las coordinaciones 1, 2, 3 (ver Figura 75). Después, coordinó los procesos valor propio, vector propio, conjunto solución de un sistema de ecuaciones y conjunto generador en el proceso espacio propio (coordinación 4, ver Figura 76 y 78). Para lograr esta coordinación, el estudiante tuvo que tener control sobre cada raíz $\lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 2$ del polinomio característico $f_O(\lambda)$ y estableció con cada una de las raíces del $f_O(\lambda)$ el sistema $([O]_B - \lambda\boldsymbol{I})x = 0$. Posteriormente, con su estructura proceso del CSSE logró encontrar su conjunto solución y después determinar cada espacio propio asociado a cada valor propio λ, es decir, los espacios propios E_{λ_1} y E_{λ_2}. Posteriormente, coordinó los procesos de multiplicidad algebraica y geométrica en el proceso OLD, coordinación 5. Para lograr esta coordinación, el estudiante trabajó con el espacio vectorial de dimensión finita ($\mathbb{R}^3$) y el operador lineal $T(x_1,\ x_2,\ x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$ definido sobre $\mathbb{R}^3$, además con su estructura proceso de polinomio característico logró calcular $f_T(\lambda) =$

$(1-\lambda)^2(2-\lambda)$, posteriormente analizó el número que se repite una raíz del polinomio característico para comparar con el número de vectores propios linealmente independientes se pueden generar con ese valor propio. Después, E5 mostró evidencia de la coherencia de su esquema-OLD la cual se fundamentó en que la multiplicidad algebraica de cada valor propio debe coincidir con la dimensión del espacio propio asociado a cada valor propio (Tabla 26).

Tabla 26

Fragmento de Entrevista. Problema 23. E5

Diálogo	Figuras
E5: Sí es diagonalizable. E: ¿Por qué? E5: Porque ya hallé la multiplicidad geométrica doble y da dos. Ya el otro simple no hay que calcularlo. E: ¿Cuál tiene multiplicidad dos? E5: El 1. E: ¿Cuáles son los valores propios? E5: 1 y 2. E: ¿Por qué es diagonalizable? E5: Porque para el doble [señaló, $\lambda = 1$ y se refirió a la	**Figura 75** *Evidencia de la Coordinación 1, 2 y 3. E5* 

Diálogo	Figuras
multiplicidad algebraica del valor propio] es de dimensión 2 el espacio propio. El otro como es simple la dimensión va a ser 1 [Figura, 75]. E: ¿Y eso qué? E5: Ya es diagonalizable. E: ¿Pero por qué? ¿Cuál es la definición de que un operador lineal sea diagonalizable? E5: Bueno que la multiplicidad algebraica de sus valores propios coincida con la multiplicidad geométrica. E: Eso significa que un operador…. E5: O puedes verlo como que existe una base que ese operador lineal en esa base tiene forma diagonal [se refirió a la existencia de una base cuya representación matricial del operador lineal en esa base sea una matriz diagonal]. E: Ok.	**Figura 76** *Evidencia de la Coordinación 4. E5* 
[⁝] E5: Con la definición, habría que evaluar el vector en el operador y ver que existe un λ por eso... Perfecto no me equivoqué, sí son	

Diálogo	Figuras

valores propios como se esperaba [escribió, Figura 77]. [⁝]

E: Bueno, a ver… si me preguntan ¿Ese operador lineal es diagonalizable?

E5: No es necesario calcular todos cuando es simple, nada más hay que calcular los que no sean de multiplicidad 1.

E: ¿Qué significa eso? ¿Qué yo debo responder a partir de la multiplicidad geométrica y algebraica?

E5: Sí.

E: Yo podría responder a partir de ahí.

E5: Claro, es diferente al uno [se refirió al problema 19] que me piden la matriz.

E: ¿La definición que conoces de operador lineal diagonalizable es?

E5: Que un operador lineal es diagonalizable tenga forma diagonal, es decir, que la representación matricial del operador lineal en esa base sea diagonal.

Figura 77

Evidencia de la Estructura Proceso de Vector Propio. E5

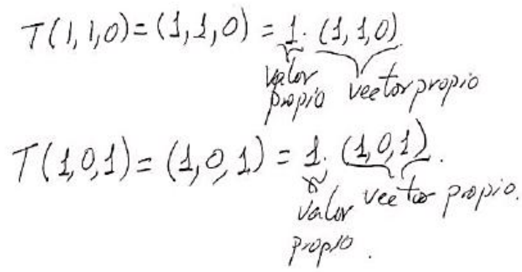
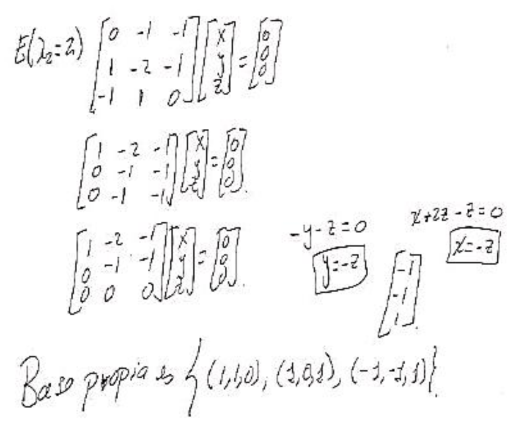


Figura 78

Evidencia de la Coordinación 4. E5

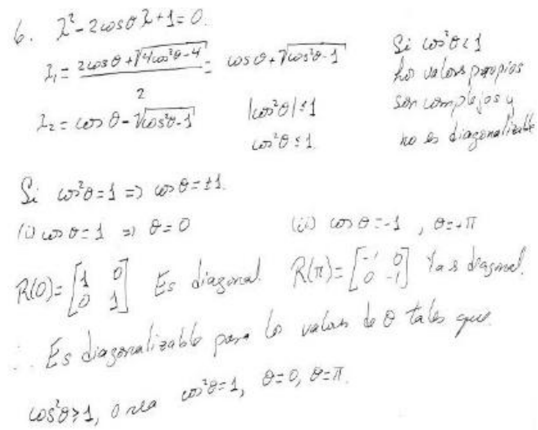


Diálogo	Figuras
E: ¿Esa es una forma de caracterizar a un operador lineal diagonalizable?	
E5: ¡Ajá!	
E: Hablas de una base…	
E5: Sí, pero yo no tengo que dar la base porque ahí me dice es diagonalizable y yo digo sí, y puedo decir que si existe la base.	
E: ¿Por qué existe esa base?	
E5: Porque cumple las condiciones necesarias y suficientes.	
E: Ok.	
E5: Bueno te voy a dar la base. Pero está visto y probado que con aquello era suficiente. Aquí la base [escribió, Figura 78].	
E: ¿Si es base?	
E5: Sí, tiene un cero aquí y un cero aquí [señaló los vectores de la base dicha en la Figura 78]. Son linealmente independientes dos a dos y son tres vectores pues generan a $\mathbb{R}^3$.	

En el problema veinticuatro E5 evocó a su esquema-OLD y estableció las coordinaciones 1, 2 y 3. Posteriormente, analizó el discriminante y consideró solo las raíces reales del polinomio característico, Tabla 27.

Tabla 27

Fragmento de Entrevista. Problema 24. E5

Diálogo	Representación
E5: Son 84 casos E: ¿Cuántos? E5: Un decir… si coseno vale 1…Ya. E: ¿Cómo queda? E5: Para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. E: ¿Si te da? E5: Es diagonal [escribió, Figura 79].	**Figura 79** *Respuesta al Problema 24. E5* 

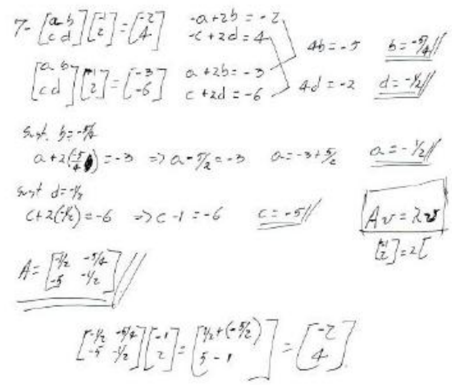
El, E2, E3 y E4 no responden el problema 24. E5 determinó los valores de θ para que $\boldsymbol{R}(\theta)$ sea diagonalizable.

En el problema veinticinco E4 da una solución alterna. Él no evoca al esquema-OLD, utiliza la igualdad $\boldsymbol{A}v = \lambda v$ con $v \neq 0$ y su concepción proceso del conjunto solución de un sistema de ecuaciones para establecer su respuesta. Se muestra evidencia en la Tabla 28.

Tabla 28

Fragmento de Entrevista. Problema 25. E4

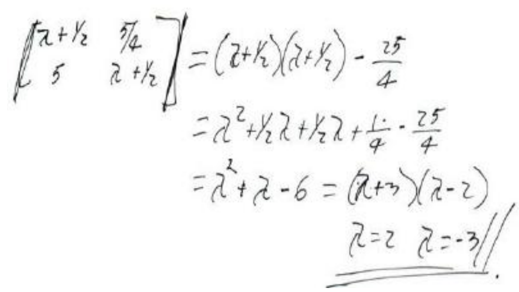
Diálogo	Representación
E: ¿Qué es lo que hizo? E4: Aplique la misma propiedad. E: ¿Qué propiedad?	

Diálogo	Representación
E4: De que $\boldsymbol{A}v = \lambda v$. E: Ok E4: Tomé $\boldsymbol{A}$ como la incógnita que es lo que voy a buscar, porque ya teníamos el valor propio y vector propio. Eran cuatro elementos, necesitaba cuatro ecuaciones pero como estos me dan, me daban dos valores propios y dos vectores propios, armo la ecuación, Figura 80. E: Ok, solo para garantizar que el valor propio de esta matriz es… Ya encontraste una matriz que no es diagonal solo falta verificar que precisamente cumpla las condiciones. E4: Sí ya. Por ejemplo, para dos era $(-1, 2)$. E: Ok, te entiendo. E: El punto que este sea un valor propio. E4: Si me dicen que es un valor propio. E: Pero de la matriz dada, te dicen da una matriz $\boldsymbol{A}$ no diagonal cuyos valores propios sean 2, -3 y cuyos vectores propios sean $(-1,2)$ y …	***Figura 80*** *Respuesta al Problema 25, Parte 1. E4* 

Posteriormente, E4 mencionó que la matriz que construye es correcta y determina el polinomio característico asociado a la matriz que construyó y verifica que los valores propios encontrados son los que da el problema, es decir, estableció la coordinación 2, Tabla 29.

Tabla 29

Fragmento de Entrevista. Problema 25. E4

Diálogo	Representación
E4: ¿No era encontrar una matriz?	
E: Sí. Ahora te pregunto ¿Realmente el 2 es un valor propio de la matriz? Ya me mostraste que si tu pones la matriz acá y pones el vector acá… el $(-1, 2)$ satisface esto con esa matriz dada …	E4 verificó que 2 y -3 son valores propios **Figura 81** *Respuesta al Problema 25, Parte 2. E4*
E4: ¡Ah! Necesitamos hacer las operaciones que hicimos en los ejercicios anteriores para verificar que precisamente….	
E: Necesito saber si realmente ese dos ahora es un valor propio de la matriz que diste.	
E4: Pero es que tiene que serlo.	
E: ¿Por qué?	
E4: Porque si no, no cumpliera la operación que vamos hacer, por ejemplo, lo que se hace para encontrar los valores propios de esa matriz es esa misma expresión (señaló, $\boldsymbol{A}v = \lambda v$). Lo que se hace es el proceso inverso, allá tenemos la matriz y no tenemos ni los vectores ni los valores propios, ahora aquí nos dan… ejemplo, tengo la matriz y lo que queremos hallar es el valor propio con sus vectores propios.	
E: ¡Ajá!	

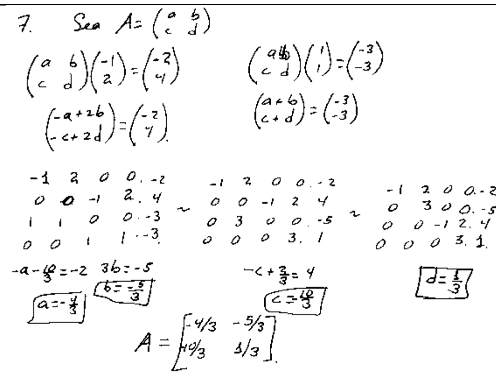
Diálogo	Representación
E4: Utilizamos esta expresión y hallamos un sistema de ecuaciones igual, ahora lo que tenemos es valor propio y vector propio es encontrar la matriz, ahora hice una simple sustitución en la misma expresión. E: Ok, sólo es para comprobar. E4: Ahí. E: El procedimiento parece razonable. E4: Por definición, dice que λ es un valor propio de esta, de esa matriz cualquiera si y solo si cumple esta propiedad ¿No es lo que dice la definición? E: A ver, pensemos en… ¿Cómo garantizas que esos si son valores propios de esa matriz? E4: Escribió, Figura 81.	

En relación al problema veinticinco E5 a partir de la igualdad $\boldsymbol{A}v = \lambda v$ construye un sistema de ecuaciones y logró determinar la matriz requerida, Tabla 30.

Tabla 30

Fragmento de Entrevista. Problema 25. E5

Diálogo	Representación
E5: Eso está muy largo. E: Ya casi los tienes E5: Esto es respectivamente, este es de este y este de este. E: ¿Qué es lo que estás haciendo?	**Figura 82** *Respuesta al Problema 25, Parte 1. E5*

Diálogo	**Representación**
E5: Encontrando las dichosas matrices que cumplen eso. E5: ¿Nada más hay una matriz que cumple eso? E: ¿Qué es lo que estás haciendo? E5: No sé si sea la vía más rápida pero es la que se me ocurrió. E: ¿Lo encontraste con un sistema de ecuaciones? E5: ¡Ajá! E5: Con sus errores de cálculos respectivos la matriz me quedo esta [escribió, Figura 82]. E: ¿Cómo le hiciste para encontrarla? E5: Aplique la definición de vector propio. E: ¿Cómo? E5: Si este es un vector propio [señaló, $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$] asociado al valor propio 2. $\boldsymbol{A}$ por el vector propio tiene que ser igual a λ por el vector. E: Ok. E5: Y hice eso para una matriz general de dos por dos. Resolví el sistema y me dio eso. E: Ok ¿Esa matriz tiene como vector propio al otro vector? E5: ¿Este?	

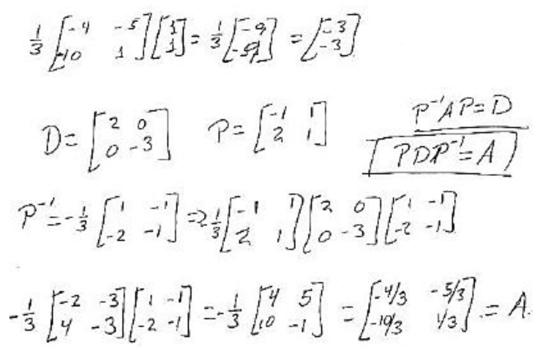
Diálogo	Representación
E: Al $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Te dan los valores propios 2 y -3.	
E5: Hice eso a, b, c, d deben cumplir eso y esto [señaló, $\begin{pmatrix}a-2b\\-c+2d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$].	
E: Ok, puedes comprobar para el $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.	
E5: Ya te digo si no tengo error de cálculo.	
E: Esta es la matriz $\boldsymbol{A}$ que encontraste cuyos valores propios son 2 y -3 y cuyos vectores propios son $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$.	
E5: Sería [escribió, Figura 83].	
E5: Hay un error de cálculo.	
E: Entonces.	
E5: Ahí sí da.	

Posteriormente, el investigador cuestiona a E5 sobre otra forma de resolver el problema veinticinco. Después, E5 evocó a su esquema-OLD, mostró evidencia de la coherencia del esquema-OLD y estableció la coordinación 6. Para lograr esta coordinación, el estudiante trabajó con una matriz de tamaño 2×2, además tuvo control sobre la relación $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ porque logró determinar las condiciones específicas y construir las matrices $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix} \wedge \boldsymbol{D}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}$ con la información dada, posteriormente identificó a la matriz buscada $\boldsymbol{A}$ como una matriz semejante a $\boldsymbol{D}$. Después, se encapsula el proceso $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ en objeto OLD al que pueden aplicarle acciones específicas (despejar la matriz **A**).

Tabla 31.

Tabla 31

Fragmento de Entrevista. Problema 25. Respuesta Alternativa. E5

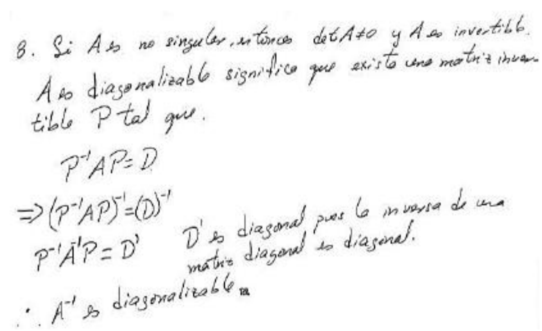
Diálogo	Representación
E: ¿Habrá otra forma de determinar esa matriz $\boldsymbol{A}$?	
E5: Sí, haciendo…. te lo escribo. Si $\boldsymbol{D}$ vale esto y $\boldsymbol{P}$ esto [escribió $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, Figura 83] como se cumple que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ lo halló al revés multiplicando por $\boldsymbol{P}$ y por $\boldsymbol{A}$. O sea, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$.	**Figura 83** *Respuesta al Problema 25, Parte 2. E5* 
E5: Y ahí me va a dar.	
E: Puedes seguir con esa idea para ver si da lo mismo. Ya tienes a $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ ¿Qué te falta?	
E5: $\boldsymbol{P}^{-1}$.	
E5: Hace cuentas	
E5: Esa sería $\boldsymbol{P}^{-1}$ (escribió, Figura 83).	
E: ¿Cómo le hizo?	
E5: Aplique la definición cuando existe una matriz diagonal y eso. O sea como me dan los vectores propios asociados, yo ya sé que la matriz $\boldsymbol{P}$ me da que es $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y se que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ me va dar la diagonal formada por los valores propios que son 2 y -3. Y ahí despejé la $\boldsymbol{A}$ qué era lo que me pedían.	
E: Ok.	

E4 y E5 responden el problema veinticinco de una manera alternativa al análisis a priori, es decir, no tienen necesidad de evocar al esquema-OLD. Posteriormente, E5 al ser cuestionado sobre otra manera de resolver el problema, logró evocar al esquema-OLD. Los E1 y E3 no responden los problemas 25 y 26.

En el problema veintiséis, E5 evocó a su esquema-OLD y por medio de la coordinación 6, utilizó que la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable y no singular para responder adecuadamente la pregunta, Tabla 32.

Tabla 32

Fragmento de Entrevista. Problema 26. E5

Diálogo	Representación
E5: No singular significa diferente de cero [E5 se refirió al determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$]. E: Así es. E5: Lo que hice fue esto, como $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable, existe una matriz invertible tal que se cumple eso [señaló, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$]. E: OK. E5: Aplique inversa a ambos miembros. E: Ok. E5: Es como al revés. E: Te queda…	**Figura 84** *Respuesta al Problema 26. E5* 

E5: Esto [señaló, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}'$] y la inversa de una matriz diagonal es diagonal.
E: Ok.
E5: Y ya [escribió, Figura 84].

E5 fue el único estudiante que logró responder el problema veintiséis. El E5 aplicó transformaciones a la estructura esquema de los operadores lineales, es decir, por medio del mecanismo tematización del esquema de los operadores lineales diagonalizables logró la construcción como objeto de los operadores lineales diagonalizables.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Este capítulo se encuentra estructurado en cuatro secciones. En la primera sección, se expone el modelo cognitivo de los operadores lineales diagonalizables. En la segunda sección, se describe la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema-OLD. En la tercera sección, se muestran sugerencias didácticas acerca de los operadores lineales diagonalizables. En la cuarta sección, se exponen las reflexiones finales derivadas del trabajo de investigación.

5.1 Modelo cognitivo de los operadores lineales diagonalizables

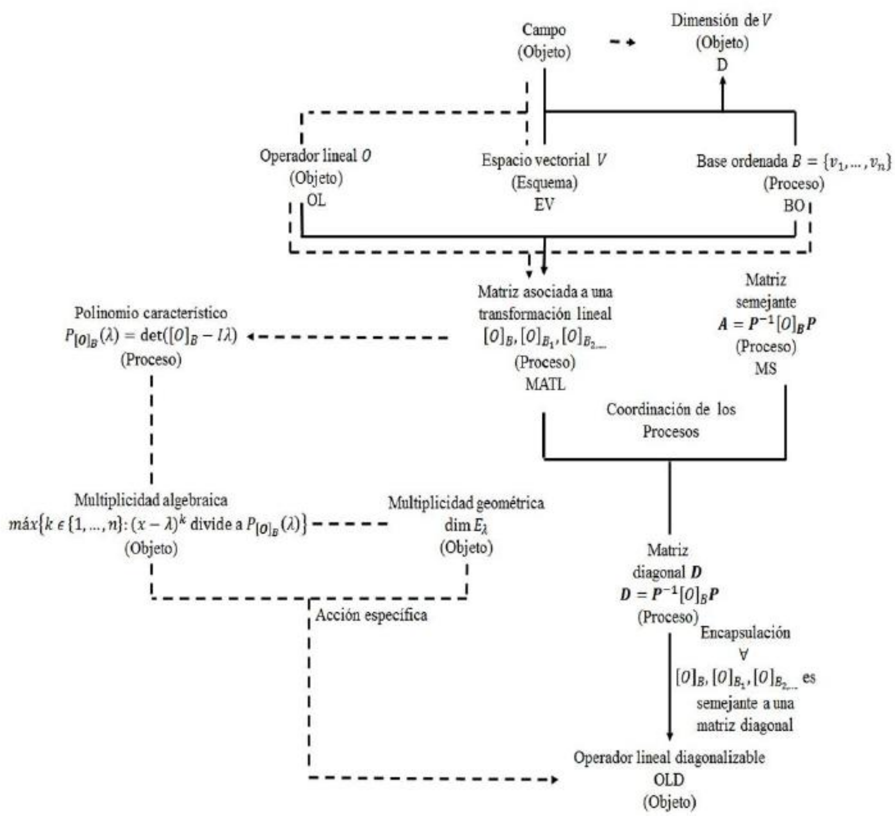
Con base en el análisis de los datos se logró obtener la descomposición genética de los OLD, sus estructuras se validaron en función de las propuestas en la DGPOLD. De acuerdo con Trigueros (2019), si a partir de los resultados se comprueban las construcciones previstas por el modelo preliminar, entonces la descomposición genética es validada. Además, se adhieren como estructuras previas las siguientes: polinomio característico como un proceso, en esta, un individuo es capaz de calcular el polinomio característico de cualquier matriz cuadrada; multiplicidad algebraica como objeto, en la cual el individuo la considera como el número que se repite una raíz de un polinomio característico asociado a un operador lineal; multiplicidad geométrica como objeto, en esta estructura los individuos la consideran como el número de elementos de la base de un espacio propio. Al menos estas estructuras deben estar en un individuo al momento de construir los OLD, dado que la evidencia recolectada, garantiza que los individuos que poseen las estructuras previas son capaces de diagonalizar o decidir si un operador lineal se puede diagonalizar.

Entonces las estructuras previas para la construcción de los operadores lineales diagonalizables como un objeto cognitivo son: espacio vectorial transformación lineal; base ordenada; matriz asociada a una transformación lineal; valores y vectores propios; conjunto solución de un sistema de ecuaciones; matriz semejante; polinomio característico; multiplicidad algebraica; multiplicidad geométrica. Los conceptos anteriores deben estar presentes en un individuo para lograr la construcción de los OLD y cada uno de esos conceptos se describe su estructura en el Anexo 3.

A continuación se describe el modelo cognitivo, describe dos trayectorias en la construcción de los OLD, es decir, se identificaron dos caminos de aprendizaje a partir de las respuestas de los estudiantes las cuales pueden surgir cuando un individuo quiera construir el concepto de interés. La primera trayectoria de construcción de los OLD se describe como sigue: dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O sobre él, con una concepción proceso de base ordenada, el individuo encuentra una base ordenada B de V. Luego, con su concepción proceso de la matriz asociada a una transformación lineal (MATL) encuentra la representación matricial de O respecto a la base B ($[O]_B$). Posteriormente, con una concepción objeto de multiplicidad geométrica y algebraica, compara estos valores para determinar si el operador lineal es diagonalizable. La segunda trayectoria de construcción de los OLD se describe a continuación: dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O sobre él, con una concepción proceso de base ordenada, el individuo, encuentra una base ordenada B de V. Posteriormente, con su concepción proceso de la matriz asociada a una transformación lineal encuentra la representación matricial (MATL) de O respecto a la base B, es decir $[O]_B$. Luego, coordina el proceso MATL con el proceso matriz semejante en el proceso matriz diagonal, es decir, encuentra una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz $\boldsymbol{P}$ (invertible), si existen, tales que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}[O]_B\boldsymbol{P}$, con lo que concluye que O es un OLD. Después, se encapsula el proceso anterior en objeto OLD al que pueden aplicarle acciones específicas. (Ver Figura 85).

Figura 85

Modelo Cognitivo de los Operadores Lineales Diagonalizables



Nota: El modelo muestra dos trayectorias de construcción de los OLD. Los segmentos de líneas punteadas muestran la primera trayectoria y los segmentos de líneas continuas muestran la segunda trayectoria.

Cabe mencionar que la segunda trayectoria se presentó con mayor frecuencia, pues los estudiantes entrevistados respondieron considerando un operador lineal diagonalizable en el sentido de Friedberg et al. (1982, p. 233), esto es, un operador lineal T sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito V es diagonalizable si existe una base B para V tal que $[T]_B$ sea una matriz diagonal.

La principal diferencia entre estos dos caminos de aprendizaje en la construcción del concepto de estudio, radicó en que por un lado se busca comparar la multiplicidad geométrica con la multiplicidad algebraica y por el otro lado se busca una matriz diagonal que sea similar a la representación matricial del operador lineal dado, es decir, un individuo con una concepción proceso de matriz semejante prefiere determinar si la representación matricial del operador lineal es semejante a una matriz diagonal que, coordinar los procesos base ordenada y vectores propios, en el proceso base propia.

5.2 Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema-OLD

A partir de las evidencias dadas por ambos casos de estudio fue posible hacer la siguiente caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de los OLD. Las relaciones establecidas que se utilizan para caracterizar el modelo que describe los niveles de desarrollo del esquema del concepto de investigación se explican a continuación:

Para empezar, sean V un espacio vectorial de dimensión finita n, O un operador lineal definido sobre V y B una base ordenada de V, entonces se tiene lo siguiente:

EV-OL-BO → MATL: para lograr esta coordinación, el individuo va a necesitar operar en los espacios vectoriales de dimensión finita, esto debe ser posible por su estructura trans-EV. Además, con su estructura proceso de operador lineal va a lograr evaluar los vectores de la base de salida en el operador lineal dado. Posteriormente, con su estructura proceso de base ordenada va a escribir las imágenes resultantes como combinación lineal de los vectores de la base de llegada. Después, se va a quedar con la información de los escalares de la combinación lineal y los va a establecer como columnas de la matriz asociada al operador lineal, es decir $[O]_B$.

EV-OL-BO-MATL-DT→PC: para lograr esta coordinación, el individuo va a necesitar operar en los espacios vectoriales de dimensión finita, esto será posible por su estructura trans-EV. Además, debe ser capaz de establecer la coordinación 1 entonces va a poder construir la representación matricial del operador lineal dado en la situación matemática y específica, es decir $[O]_B$. Posteriormente, con su estructura proceso de determinante va a calcular el $\det([O]_B - \lambda\boldsymbol{I})$ con el objetivo de construir el polinomio característico $f_O(\lambda)$ asociado a O.

PC-rP→vP o EC-SEC→vP: para lograr esta coordinación, el individuo va a necesitar analizar el polinomio característico $f_O(\lambda)$ y con una estructura proceso de raíz de polinomio determinar sus raíces (λ) las cuales de existir se deben considerar como valores propios que cumplen la igualdad $O(x) = \lambda x$ con $x \neq 0$. También, se podría considerar el análisis de la ecuación característica $f_O(\lambda) = 0$ y determinar con una estructura proceso de solución de una ecuación (SEC) las soluciones de la ecuación anterior y considerarlos como valores propios. Esto se podrá hacer para el caso de un polinomio característico asociado a un operador lineal o una matriz cuadrada.

vP-VP-CSSE-CG→EP: para lograr esta coordinación, el individuo debe tener control sobre cada raíz λ (si existe) del polinomio característico $f_O(\lambda)$ y establecer con cada una de las raíces del $f_O(\lambda)$ el sistema $([O]_B - \lambda\boldsymbol{I})x = 0$. Posteriormente, con su estructura proceso del CSSE podrán encontrar su conjunto solución y después con su estructura proceso de conjunto generador determinar cada espacio propio asociado a cada valor propio λ, es decir E_λ.

MA-MG→OLD: para lograr esta coordinación, el individuo va a necesitar operar en los espacios vectoriales de dimensión finita propuestos y trabajar con operadores lineales O definidos sobre ellos, esto será posible por su estructura trans-EV y su estructura proceso de los operadores lineales. Además, con su estructura proceso del polinomio característico podrán determinar $f_O(\lambda)$ para posteriormente estar en condiciones de comparar el número que se repite λ como raíz del polinomio característico con el número de vectores propios linealmente independientes que se pueden generar con ese valor propio λ.

MS-MD→MDZ: para lograr esta coordinación, el individuo puede trabajar sobre el espacio vectorial de matrices de tamaño $n \times n$, esto va a ser posible por su estructura trans-EV. Además, con su estructura proceso de matriz semejante puede encontrar una matriz $\boldsymbol{P}$ talque dada la matriz $\boldsymbol{A}$ se satisface $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ en donde la existencia de la matriz $\boldsymbol{P}$ está sujeta a condiciones específicas y con su estructura proceso de matriz diagonal considera a $\boldsymbol{D}$ como aquella matriz que tiene valores distintos de cero en las entradas a_{ij} con $i = j$ y cero entro caso.

Una vez explicadas las relaciones se presenta el modelo que describe los niveles de desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables:

Nivel *intra-OLD*: se caracteriza porque los conceptos espacio vectorial, base ordenada, operador lineal, matriz asociada a una transformación lineal, determinante, matrices semejantes, matriz diagonal, conjunto solución de sistema de ecuaciones, valores y vectores propios, operador lineal diagonalizable, matriz diagonalizable están aislados (como definiciones o como una estructura proceso) o se pueden establecer las relaciones: dado cualquier espacio vectorial puede el individuo determinar la representación matricial de un operador lineal respecto a una base ordenada, es decir, se coordinan los procesos espacio vectorial, operador lineal, base ordenada en el proceso matriz asociada a una transformación lineal (EV-OL-BO → MATL); dado cualquier espacio vectorial de dimensión finita, un operador lineal O determinar su polinomio característico $f_O(\lambda)$, es decir, se coordinan los procesos matriz asociada a una transformación lineal y determinante en el proceso polinomio característico $f_O(\lambda)$, (MATL-DT→PC). Estás relaciones pueden ser independientemente de la situación de decidir si un operador lineal es diagonalizable.

Nivel *inter-OLD*: se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre las estructuras cognitivas, en esta etapa un individuo tiene presente las relaciones anteriores de la etapa intra-OLD en la situación matemática y específica. Además, se establecen las siguientes relaciones: se coordinan los procesos polinomio característico y raíz de un polinomio en el proceso valor propio como una raíz de un polinomio característico o se coordinan los procesos de ecuación característica (EC) y solución de una ecuación característica (SEC) en el proceso valor propio como solución de la ecuación característica (PC-rP→vP o EC-SEC→vP); determinar para cada valor propio (si existen) el espacio propio E_λ asociado ha dicho valor, es decir, se coordinan los procesos de valor propio, vector propio, conjunto solución de un sistema de ecuaciones y conjunto generador en el proceso de espacio propio (vP-VP-CSSE-CG→ EP); coordinar los procesos de multiplicidad algebraica y geométrica por medio del operador lineal diagonalizable

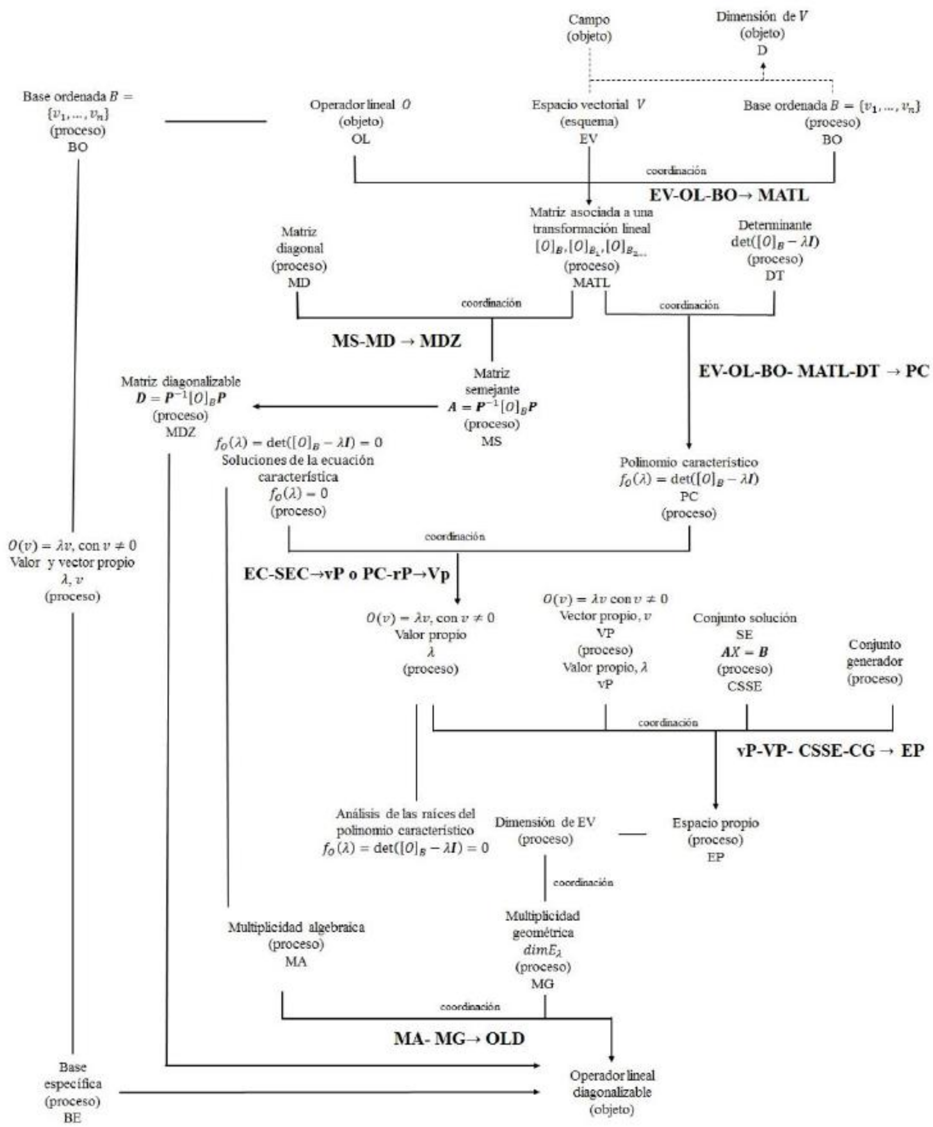
(MA-MG→OLD); coordinar los procesos de matriz asociada a una transformación lineal, matriz semejante y matriz diagonal en el proceso matriz diagonalizable (MATL-MS-MD→MDZ).

Nivel *trans-OLD*: se construye una estructura implícita o explícita a través de la cual se comprenden las relaciones desarrolladas en la etapa inter-OLD. El esquema logra coherencia cuando el individuo tiene la capacidad de determinar el alcance de su esquema-OLD, es decir, puede utilizar la comparación de la multiplicidad algebraica del valor propio con la dimensión del espacio generado por ese valor propio como criterio para decidir si un operador lineal se puede diagonalizar (si para cada valor propio de multiplicidad m produce exactamente m vectores propios linealmente independientes) y por consecuencia se puede construir una base cuya representación matricial del operador lineal en esa base es una matriz diagonal; utilizar la comparación de la multiplicidad algebraica del valor propio con la multiplicidad geométrica (si para cada valor propio de multiplicidad m produce exactamente m vectores propios linealmente independientes) como criterio para decidir si una representación matricial de un operador lineal es semejante a una matriz diagonal y por consecuencia construir y justificar la existencia de las matrices $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$ que satisfacen $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}[O]_B\boldsymbol{P}$; su coherencia le permite decidir cuándo los operadores lineales en espacios vectoriales distintos a $\mathbb{R}^n$ se podrían diagonalizar; usar los operadores lineales diagonalizables para resolver otro tipo de problemas, es decir, usar su representación sencilla o propiedades para resolver los problemas.

En la Figura 86 se muestra el desarrollo del esquema-OLD con base en las relaciones expresadas y evidenciadas por los estudiantes.

Figura 86

Nivel Trans del Esquema de los Operadores Lineales Diagonalizables



En este trabajo se han caracterizado los niveles de desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables. Al ser un estudio de caso instrumental se puede generalizar sobre los niveles de desarrollo a partir de los casos estudiados, no siendo los casos el objetivo sino el desarrollo del *esquema* en la situación matemática de diagonalizar un operador lineal. La profundización del análisis para el refinamiento de los niveles de desarrollo estuvo centrada en las entrevistas a los casos teóricos (Merriam, 1998; Stake, 1994), pues con ello se esclareció las relaciones entre los conceptos involucrados en los operadores lineales diagonalizables.

Asimismo, los resultados indicaron dos aspectos fundamentales para la coherencia del esquema-OLD: 1) considerar a un operador lineal diagonalizable como aquel que tiene una representación matricial diagonal respecto a una base, puesto que para construir una tal base se debe satisfacer que un valor propio de multiplicidad m produce exactamente m vectores propios linealmente independientes; 2) en el caso de tener una matriz diagonalizable se debe verificar que esta sea semejante a una matriz diagonal, lo cual invita a reflexionar sobre la construcción de una matriz invertible cuyas columnas sean vectores propios para la matriz y cada valor propio de multiplicidad m produzca exactamente m vectores propios linealmente independientes. Ambos aspectos quedan modelados por las relaciones: EV-OL-BO → MATL; MATL-DT→PC; PC-rP→vP o EC-SEC→vP; vP-VP-CSSE-CG→ EP; MA-MG→OLD y MATL-MS-MD→MDZ.

Finalmente, se reconoce que el análisis a partir de la teoría APOE indica trascendencia en la observación e interpretación de los datos, no obstante, se requieren de nuevas investigaciones en las cuales se pueda responder cómo se aplican transformaciones a la estructura esquema-OLD de los operadores lineales, es decir, el estudio de la construcción de los operadores lineales diagonalizables como un objeto por medio del mecanismo tematización.

5.3 Sugerencias didácticas respecto a los OLD

Se sugiere trabajar con problemas que involucren la inteorización de acciones específicas para reconocer a los vectores propios de los operadores lineales en su representación funcional y hacer énfasis de que se buscan los vectores diferentes de cero para la representación matricial y funcional.

Se sugiere trabajar precisamente con los operadores lineales diagonalizables y mostrar la ventaja de utilizar las bases conformadas por vectores propios puesto que se identificó la preferencia de las bases canónicas para representar a los operadores lineales para el caso de montar MATL. Esta preferencia por parte de los participantes en la investigación se sustenta en hacer menos cálculos para encontrar las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base de salida con respecto a la base de llegada.

Se sugiere hacer evidente la equivalencia entre las definiciones Hoffman y Kunze (1973) y Friedberg et al., (1982). Es decir, si los estudiantes logran interiorizar la equivalencia anterior, tendrían claro que al encontrar una base donde sus elementos sean vectores propios del operador lineal dado entonces su representación matricial en esa base será una matriz diagonal. La anterior sugerencia se propone porque se identificó que los participantes tienen la tendencia de construir una matriz invertible ($\boldsymbol{P}$) y una matriz diagonal ($\boldsymbol{D}$) tal que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}[O]_B\boldsymbol{P}$ con $[O]_B$ como la representación matricial del operador lineal O respecto a la base B, que construir una base conformada por vectores propios.

5.4 Reflexiones finales

Dada la complejidad de estructuración del conocimiento matemático relacionado con los operadores lineales diagonalizables proponemos este modelo cognitivo (ver Figura 86) el cual se puede refinar mediante la aplicación de problemas que involucren al esquema-OLD, esto con el fin de buscar más evidencia empírica para develar y hacer explicitas nuevas relaciones en un nivel de desarrollo trans-OLD, aunque, la evidencia encontrada garantiza que las relaciones que proponemos deben estar y son un buen punto de partida para futuras investigaciones.

Otra investigación que podría realizarse es cómo el modelo esquema-OLD propuesto puede ser *tematizado* como un objeto, es decir, cómo los estudiantes aplican transformaciones al esquema. Encontramos evidencia que el esquema-OLD es *tematizado* por medio de la relación $\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$ cuando se tiene necesidad de calcular potencias enésimas de una matriz diagonalizable. Habría que buscar más información si esta relación es la que permite *tematizar* al esquema-OLD propuesto.

Finalmente, este trabajo pretende ser material de reflexión para profesores en ejercicio acerca de la construcción de conceptos y las relaciones entre ellos desde un enfoque cognitivo. Es decir, cómo los procesos cognitivos se desarrollan al construir conceptos abstractos y cómo estos se relacionan en situaciones matemáticas y específicas, por ejemplo, con este estudio se aporta a la matemática educativa con un modelo que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender el concepto de operador lineal diagonalizable como un objeto cognitivo. Además, se contribuye con la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de los operadores lineales diagonalizables, para lograr esta caracterización se consideró dos aspectos: 1) se consideró al esquema como una estructura que incluye diferentes conceptos interrelacionados; 2) se consideró la situación matemática y específica que involucra decidir si un operador lineal se puede diagonalizar.

BIBLIOGRAFÍA

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto integral definida en el marco de la teoría APOE* [Tesis de doctorado inédita]. Universidad de Salamanca.

Altieri, M., & Schirmer, E. (2019). Learning the concept of eigenvalues and eigenvectors: a comparative analysis of achieved concept construction in linear algebra using APOS theory among students from different educational backgrounds. *ZDM Mathematics Education*, 51, 1125–1140. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01074-4

Andrews-Larson, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2017). A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 00(0), 1–21. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1276225

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, H. Schoenfeld., E. Dubinsky & T. Dick (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. II CBMS issues in mathematics education* (Vol. (Vol. 6, pp. 1–32). American Mathematical Society

Axler, S. (1997). *Linear algebra. Done right*. New York, USA: Springer-Verlag.

Badillo, E., Trigueros, M., & Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS. In C. Azcárate, M. Camacho-Machin, Mª

T. González & M. Moreno (eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 31–51). Universidad de la Laguna.

Bell, E. T. (2002). *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica.

Berman, A., & Okubo, K. (2012). The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. In S. Je Cho (Ed.), *Issues Surrongding Teaching Linear Algebra* (pp. 593–596). Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_65

Boigues, F.-J., Llinares, S., & Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(3), 255–282. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33519249002

Bourbaki, N. (1969). *Elementos de historia de las matemáticas* (2nd. ed.). Alianza.

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Porter, A.D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, 24, 41-46. https://doi.org/10.1080/07468342.1993.11973504

Dogan, H. (2018). Differing instructional modalities and cognitive structures: *Linear algebra. Linear Algebra and its Applications*, 542, 464-483. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.07.007

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Vol. 23, pp. 85–124). Kluwer Acedemic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva píagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática*, 8(3), 24–41. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/3/04Dubinsky.pdf

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton, M. Artigue., U. Kirchgräber., J. Hillel., M. Niss & A. Schoenfeld (eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study* (vol. 7, pp. 275–282). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Friedberg, S. H., Insel, A., & Spence, L. E. (1982). *Álgebra lineal*. Publicaciones cultural.

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios. In C. Fernández, M. Molina & N. Planas (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 259–268). SEIEM.

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(2), 63-84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Godement, R. (1974). Álgebra. Tecnos, S. A.

González, D., & Roa, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, 35(2), 89–107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69-95. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23, pp. 191–207). Kluwer Acedemic Publishers.

Hillel, J., & Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the International Conference for Psychology of Mathematics Education 18* (pp. 65–72). International Group for the Psychology of Mathematics Education. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED383537.pdf

Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal*. Prentice-Hall Hispanoamerica.

Kú, D. (2012). *Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE* [Tesis de doctorado inédita]. Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional.

Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65–89. http://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol20-2.pdf

Lang, S. (1987). *Linear algebra*. Springer.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivist: Models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum Associates.

Mendoza-Sandoval, E. (2015). *Construcción de la matriz cambio de base: Un análisis cognitivo en términos de la teoría APOE* [Tesis de maestría inédita]. Universidad Autónoma de Guerrero.

Mendoza-Sandoval, E., Rodríguez-Vásquez, F., & Roa-Fuentes, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la teoría APOE. In C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 371–380). Investigación en educación matemática XIX. http://hdl.handle.net/10045/51591

Merriam, S. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. Jossey-Bass.

Montelongo, O. (2016). *Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal* [Tesis doctoral inédita]. Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo.

Nicholson, W. K. (2018). Linear algebra with applications. Lyryx. Recuperado el 14 de diciembre de 2020 de https://lyryx.com/wp-content/uploads/2018/01/Nicholson-OpenLAWA-2018A.pdf

Oktaç, A., Trigueros, M., & Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 33–37.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432 (8), 2112–2124. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.034

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Paradigma*. 33 (1), 103-134. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/494/491

Parraguez, M., Lezama, J., & Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio de base de vectores. *Enseñanza de las ciencias*, 34(2), 129–150. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/309283

Piaget, J., & García, R. (2004). Psicogénesis e historia de la ciencia (décima edición). México: Siglo veintiuno editores.

Poole, D. (2011). Álgebra Lineal. Una introducción moderna. (S. R. Cervantes Gonzales, Ed.) (3ra ed.). México: Cengage Learning.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 432 (8), 2125–2140. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de*

Investigación en Matemática Educativa, 13 (1), 89–112. http://www.redalyc.org/pdf/335/33512271005.pdf

Rosales, A. (2009). Evolución Histórica del Concepto de Matriz. *Revista digital: Matemática, Educación e internet*, 9(1), 1–19. https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2038/1850

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación matemática*, 26(3), 75–107. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540689004

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Siap, I. (2008). Motivating the concept of eigenvectors via cryptography. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 27(2), 53–58. https://doi.org/10.1093/teamat/hrn001

Siero, L. R., & Romo, A. (2015, 3-7 Mayo). Actividades de modelización para un curso de Álgebra Lineal en una formación de ingenieros [comunicación breve]. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1129/455

Stake, R. (1994). Case studies. In N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Sage.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93–125.

Stewart, S., & Thomas, M. O. (2009). A framework for mathematical thinking: the case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 951–961. https://doi.org/10.1080/00207390903200984

Struik, D (1998) Historia concisa de las matemáticas. Instituto Politécnico Nacional.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17 (1), 5-32. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p30-43

Trigueros, M. (2019). Diálogo entre las teorías APOE y TAD. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 21 (5), 1-14. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p30-43

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M., & Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. *Educación matemática*, 27(2), 95–124.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. In D. Pitta–Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME* (pp. 2359-2368). University of Cyprus.

Wawro, M., Watson, K., & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM Mathematics Education*, 51, 1111–1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01022-8

Webb, D., & Abels, M. (2010). Restrictions in algebra. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education. Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp. 101–118). Sense Publishers.

Yildiz, A. (2013). Teaching the Diagonalization Concept in Linear Algebra with Technology: A Case Study at Galatasaray University. *Turkish online journal of educational technology*, 12(1), 119–130. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1008874.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Revisión de textos

Texto revisado	Definiciones		Conceptos involucrados en las definiciones
	Operador lineal	Operador lineal diagonalizable	
Friedberg, Insel y Spence (1982)	Como el problema de la diagonalización implica el estudio de una transformación que mapee a un espacio vectorial en sí mismo, es útil dar un nombre a tal transformación. En consecuencia, llamaremos a la transformación $T: V \rightarrow V$ sobre un espacio vectorial V, un operador lineal sobre V. (pág. 231)	Se dice que un operador lineal T sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito V es diagonalizable si existe una base β para V tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal. Una matriz cuadrada A es diagonalizable si A es similar a una matriz diagonal. (pág. 233)	Espacio vectorial, dimensión finita, mapeo lineal, base, matriz asociada a una transformación lineal, matriz diagonal, matriz cuadrada y matriz similar.
Godement (1974)		Sea u un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita n sobre un cuerpo conmutativo K. Se dice que u es **diagonizable** si existe una base de E formada por vectores propios de u; dicho de otra forma, respecto a la cual la matriz de u sea diagonal. (pág. 529)	Endomorfismo, espacio vectorial, dimensión finita, cuerpo conmutativo, base, vectores propios, matriz diagonal.
Hoffman y Kunze (1973)	Si V es un espacio vectorial sobre el campo F, un **operador lineal** V es una transformación lineal de V sobre V. (pág. 76)	Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Se dice que T es **diagonalizable** si existe una base de V tal que cada vector suyo sea vector propio de T. (pág. 183)	Operador lineal, espacio vectorial, dimensión finita, base, vector propio.
Nicholson (2018)	…Una transformación lineal $T: V \rightarrow V$ es llamada un operador lineal en V. (pág. 389)	Una matriz A de $n \times n$ es llamada **diagonalizable** si $P^{-1}AP$ es diagonal para alguna matriz invertible P de $n \times n$. Aquí, la matriz invertible P se dice que **diagonaliza** a la matriz A. (pág.186)	Matriz cuadrada, matriz invertible, matriz diagonal.
Poole (2011)		Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces T se llama **diagonalizable** si existe una base C para V tal que la matriz $[T]_C$ sea una matriz diagonal. (pág. 527)	Espacio vectorial, dimensión finita, transformación lineal, base, matriz asociada a una transformación lineal, matriz diagonal.
Lang (1987)	Sea $F: V \rightarrow V$ un mapeo lineal de un espacio vectorial sobre sí mismo. A veces a F se le llama operador. (pág. 68)	Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, y sea $F: V \rightarrow V$ un mapeo lineal. Se dice que una base β de V **diagonaliza** F si la matriz asociada con F relativa a β es una matriz diagonal. Si existe una base tal que **diagonaliza** F, entonces decimos que F es **diagonalizable**… Si A es una matriz de $n \times n$ en K, decimos que A puede ser **diagonalizada** (en K) si el mapeo lineal en K^n	Espacio vectorial, dimensión finita, mapeo lineal, base, matriz asociada a una transformación lineal, matriz diagonal, matriz cuadrada.
Axler, S. (1997)	… Recuerde que un operador es un mapeo lineal de un espacio vectorial a sí mismo. Recuerde también que denotamos al conjunto de operadores en V por $\mathcal{L}(V)$; en otras palabras $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$. (pág. 79)	Si $T \in \mathfrak{L}(V)$ tiene dimensión de V de distintos valores propios, entonces T tiene una matriz diagonal respecto a alguna base de V. (pág. 88)	Operador lineal, dimensión, valores propios, matriz diagonal, base.

Anexo 2. Equivalencia en las definiciones de los operadores lineales diagonalizables

Se va a demostrar la equivalencia de las siguientes definiciones:

Definición 1. Se dice que un operador lineal T sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito V es diagonalizable si existe una base B para V tal que $[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{B}}$ sea una matriz diagonal. Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable si $\boldsymbol{A}$ es similar a una matriz diagonal. (Friedberg et al., 1982, p. 223).

Definición 2. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Se dice que T es diagonalizable si existe una base de V tal que cada vector suyo sea vector propio de T. (Hoffman y Kunze, 1973, p. 183).

Demostración

[⇒] Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y T un operador lineal definido en sobre V. Supongamos que T es un operador lineal diagonalizable de acuerdo con Friedberg et al., (1982). Entonces existe una base $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ para V tal que $[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{B}}$, es una matriz diagonal, es decir:

$$[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Entonces las matrices de coordenadas de $T(\alpha_j)$ respecto a la base B, con $n = 1, 2, \dots, n$ son las siguientes:

$$[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha_1})]_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\alpha_1) = d_{11}\alpha_1$$

$$[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha_2})]_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\alpha_2) = d_{22}\alpha_2$$

$$\vdots$$

$$[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha_n})]_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow T(\alpha_n) = d_{nn}\alpha_n$$

Por lo tanto, para cada vector $\alpha_n \in B$ se satisface $T(\alpha_n) = d_{nn}\alpha_n$, es decir, T es diagonalizable de acuerdo con Hoffman y Kunze (1973).

[$\Leftarrow$] Recíprocamente, supóngase que existe una base $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que $T(\alpha_j) = \lambda_j \alpha_j$. Entonces, al aplicar T a los vectores de la base B se obtiene:

$$T(\alpha_1) = \lambda_1\alpha_1 \Rightarrow [T(\alpha_1)]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, T(\alpha_n) = \lambda_n\alpha_n \Rightarrow [T(\alpha_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{bmatrix},$$

Así, la matriz asociada a T respecto a la base B es:

$$[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Es decir, T es diagonalizable de acuerdo con Friedberg et al., (1982) por lo tanto las definiciones son equivalentes.

Anexo 3. Revisión de artículos y caracterización propia

	Concepto	Estructura	Caracterización
1.	Espacio vectorial (EV)	Proceso	Puede estar conformado por vectores, operaciones definidas entre ellos, conjuntos, bases y dimensiones cada uno considerado como un *proceso* o un *objeto*. En un nivel Trans-EV, el individuo opera con ejemplos no estándar de espacios vectoriales y evoca su *esquema* cuando este sea necesario. (Parraguez y Oktaç, 2010)
2.	Transformación lineal (TL)/Operador Lineal (OL)	Proceso	El estudiante puede reconocer si es o no una transformación lineal al verificar mentalmente la preservación de la suma vectorial y el producto por un escalar, o la preservación de combinaciones lineales. (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010)
3.	Base ordenada (BO)	Proceso	Un individuo puede reflexionar sobre el posible orden de los elementos de la base B, decidir cuál será dicho orden y establecer si un vector dado o un conjunto de vectores podrían escribirse como combinación lineal de los elementos B con el orden establecido o dar una base para el espacio vectorial dado. (Kú, Trigueros, Oktaç, 2008; Mendoza, Rodríguez y Roa, 2015)
4.	Dimensión finita (DF)	Objeto	Los estudiantes consideran la dimensión con un número que depende de la base.
5.	Campo conmutativo (CC)	Esquema	En un nivel *trans*-CC, el individuo tiene dominio sobre las operaciones definidas en el conjunto y basa su coherencia en los axiomas que cumple un campo.
6.	Matriz asociada a una transformación lineal (MATL)	Proceso	Un individuo puede determinar la representación matricial de un operador lineal para un par de bases específicas. (Montelongo, 2016)
7. 8.	Valores propios (vP); vectores propios (VP).	Proceso	Un individuo reconoce el paralelismo de los vectores $\boldsymbol{Av}$ y v para cualquier espacio de $\mathbb{R}^n$. Reconocen que un valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector v. (Salgado y Trigueros, 2014)
9.	Matriz diagonal (MD)	Proceso	Los estudiantes consideran a la matriz como aquella que tiene valores distintos de cero en las entradas a_{ij} con $i = j$ y cero entro caso.
10.	Matriz cuadrada (MC)	Proceso	Los estudiantes consideran a la matriz como un arreglo ordenado donde el número de columnas es igual al número de filas.
11.	Matriz invertible (MI)	Objeto	Les estudiantes consideran a la matriz invertible como aquella matriz cuadrada que tiene matriz inversa.
12.	Matriz similar (MS)	Proceso	Los estudiantes pueden encontrar una matriz $\boldsymbol{P}$ tal que, dada una matriz $\boldsymbol{A}$ se satisfaga $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ con $\boldsymbol{D}$ una matriz diagonal.
13.	Espacio propio (EP)	Proceso	El individuo es capaz de coordinar el proceso solución del sistema homogéneo asociado a la búsqueda de los valores y vectores propios con el proceso de encontrar el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema. (Salgado y Trigueros, 2014)
14.	Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales (CSSE)	Esquema	Se realizan operaciones de fila en una matriz aumentada para poder encontrar el conjunto de soluciones, además, dado cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede encontrar el conjunto solución. (Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007)
15.	Conjunto generador (CG)	Objeto	En esta estructurada un individuo considera al conjunto que puede tener elementos repetidos y generar aun así el mismo espacio vectorial. (Kú, 2012)
16.	Multiplicidad algebraica (MA)	Objeto	El individuo la considera como el número que se repite una raíz de un polinomio característico asociado a un operador lineal.
17.	Multiplicidad geométrica (MG)	Objeto	El individuo la considera como el número de elementos de la base de un espacio propio.
18.	Determinante (DT)	Proceso	En esta estructura el individuo podrá calcular el determínate de cualquier matriz cuadrada
19.	Polinomio característico (PC)	Proceso	El individuo es capaz de establecer el polinomio característico asociado a cualquier operador lineal dado en su representación funcional o matricial.
20.	Raíz de un polinomio (rP)	Proceso	En esta estructura el individuo es capaz de determinar todos los valores que anulan a cualquier polinomio dado sobre cualquier campo.

Anexo 4. Instrumento de investigación: cuestionario

1. ¿Qué es un espacio vectorial?
2. Determinar si los siguientes conjuntos con las operaciones dadas son espacios vectoriales.

   a) El conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con las siguientes operaciones:

   $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$
   $$c \cdot \mathbf{A} = (ca_{ij}),$$

   donde, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ y $c \in \mathbb{R}$.

   b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ con la suma de vectores y multiplicación escalar por vector usuales.
3. ¿Qué es una base ordenada para un espacio vectorial de dimensión finita?
4. Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices de tamaño 2×2 sobre $\mathbb{R}$, determinar una base ordenada del espacio vectorial dado distinta de $B = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right\}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
5. Calcula el determinante de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
6. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones con coeficientes reales encontrar su conjunto de soluciones.

   a)
   $$\begin{aligned} 5x + 6y &= -1 \\ 2x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 4 \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= -2 \end{aligned}$$
7. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices ¿Qué significa que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean matrices semejantes?
8. ¿Qué es la dimensión de un espacio vectorial?
9. a) ¿Qué significa que un vector sea propio para un operador lineal O?

   b) ¿Qué significa que un vector sea propio para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$?
10. Considera el operador lineal $O : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $(x, y) \mapsto (x, 0)$. Decide cuáles de los vectores del siguiente conjunto $\mathcal{C}$ son vectores propios de O en caso de serlo, a qué valor propio están asociados:

    $$\mathcal{C} = \{(2, 0), (1, -1), (5, 0), (4, 1), (0, 1), (0, -3), (0, 0)\}.$$
11. ¿Qué es un espacio propio?
12. ¿Qué entiendes por un operador lineal diagonalizable?
13. Define formalmente qué es un operador lineal diagonalizable.
14. Define formalmente qué significa que una matriz $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sea diagonalizable.
15. a) ¿Qué es la multiplicidad algebraica de una raíz de un polinomio?

    b) ¿Qué es la multiplicidad geométrica de un valor propio?

16. Sea $O : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ el operador lineal dado por $O(x, y) = (x + y, x - y)$ y sean $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{C}^2$. Encuentra la matriz de O, correspondiente a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

17. Sean $\mathbb{R}[x]_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2, 3\}$ y $\mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2\}$ los espacios de polinomios de grado menor igual a 3 y 2, respectivamente. Considera $D : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2$, definido por, $f(x) \mapsto f'(x)$ (cada polinomio lo transforma en su derivada). Determina la representación matricial de D, correspondiente a las bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}$.

18. Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (6x+4z, x+2y+z, -3x-z)$. Encuentra la representación matricial $[f]_{\mathcal{B}}$ respecto a la base canónica ordenada $\mathcal{B}$ y la representación matrical $[f]_{\mathcal{B}_1}$ respecto a la base ordenada $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (4, 1, -3)\}$ y responde las siguientes preguntas:

    a) ¿Qué representación matricial de f fue más complicada de calcular y por qué?

    b) ¿Qué representación matricial para f te parece más conveniente y por qué?

    c) ¿Existe otra base $\mathcal{B}_2 \neq \mathcal{B}_1$ tal que la representación matricial para f también sea diagonal? Justifica tu respuesta.

    d) ¿Existe otra base $\mathcal{B}_3$ tal que la representación matricial de f en esa base, sea diagonal y tenga valores distintos en la diagonal de la matriz $[f]_{\mathcal{B}_1}$? Justifica tu respuesta.

19. Encuentra una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz invertible $\mathbf{P}$ tales que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, para la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

20. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ¿$\mathbf{A}$ es diagonalizable? Justifica tu respuesta

21. Dada la matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, calcular $\mathbf{B}^{100}$.

    Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, calcular $\mathbf{A}^{100}$.

22. Decide si el operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (24x_1 + 20x_2, -30x_1 - 26x_2)$ es diagonalizable. Justifica tu respuesta.

23. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$. Es diagonalizable el operador lineal dado. Justifica tu respuesta.

24. Considera la siguiente matriz $\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ¿Para qué valores de θ, $\mathbf{R}(\theta)$ es diagonalizable?

25. Da una matriz no diagonal de 2×2 cuyos valores propios sean 2 y -3 y cuyos vectores propios asociados sean $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

26. Sea $\mathbf{A}$ no singular y $\mathbf{A}$ diagonalizable ¿$\mathbf{A}^{-1}$, es diagonalizable?