UAGro
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática

Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario

Tesis que, para obtener el grado de Doctor en ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, presenta:

M.C. Javier García García

Director de tesis: Dr. Crisólogo Dolores Flores

Chilpancingo de los Bravo, Gro. 12 de enero de 2018.

Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario

Tesis de doctorado

Javier García García

Director de tesis: Dr. Crisólogo Dolores Flores

Comité evaluador:
Dr. Crisólogo Dolores Flores
Dr. Gustavo Martínez Sierra
Dra. Ma. Guadalupe Cabañas Sánchez
Dr. Carlos Rondero Guerrero
Dr. Vicenç Font Moll

2018
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo de los Bravo, Gro., México.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) Guerrero, por la beca otorgada a mi persona durante mis estudios del Doctorado.

Becario núm.: **378614**

Abstract

This paper answers three research questions: (1) What mathematical connections do pre-university students make when they solve tasks (algebraic, graphical and application problems) of Calculus that involve the derivative and the integral?, (2) What is the relationship between those mathematical connections that pre-university students make and how they contribute to mathematical understanding of the Fundamental Theorem of Calculus?, and (3) What alternative conceptions appear when pre-university students solve tasks (algebraic, graphical and application problems) of Calculus that involve the derivative and the integral?

In this research, we accept that there is a strong relationship between belief systems, mathematical connections and mathematical understanding. We understand mathematical connections as a cognitive process through which a person relates two or more ideas, concepts, definitions, theorems, procedures, representations and meanings with each other, with other disciplines or with real life. Mathematical connections emerge when students solve specific tasks and can identify them in their written productions or in the oral or gestural arguments they develop. On the other hand, we accept that the students' previous belief systems can provoke in them the appearance of alternative conceptions. These are understood as those students' conceptions that are inconsistent with what the mathematical community accepts as correct and that have been socially shared and negotiated. Alternative conceptions can represent an obstacle at the moment in which mathematical connections are intended and consequently can hinder mathematical comprehension.

On the other hand, Task-Based Interviews were used for collecting data collection that presented derivative and integral tasks in the algebraic and graphs registers, and application problems. While thematic analysis was used to analyze the data. Analysis of productions (written, verbal and gestural) of the 25 participants allowed us to identify 347 intra-mathematical and extra-mathematical connections students made. Among these, the most frequent were: the derivative of a polynomial function of the form $f(x) = x^n$ is $f'(x) = nx^{n-1}$; the integral of a polynomial function of the form $f(x) = x^n$ is $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, the derivative and the integral are inverse operations; in a definite integral, the upper limit should be evaluated in the antiderivative of $f'(x)$ and should be subtracted from the lower

limit evaluated antiderivative, the integral is associated with the area under a curve, The integral of the derivative of a polynomial function is the same function and, the integral of the acceleration function of an object is its velocity and the integral of the velocity function is its position. The identified mathematical connections were categorized as: procedural, different representations, characteristic, reversibility, meaning and, part-everything. Likewise, the identified mathematical connections were strongly related so they form a system of mathematical connections associated with the TFC and the concept of function.

In addition, the written and verbal productions of the students indicated the presence of 67 alternative conceptions distributed in 9 categories. Among these, the most frequent are: the derivative of the integral of a polynomial function (or vice versa) is obtained by calculating the derivative and the integral separately, ignoring the reversible sense of them; the instantaneous velocity at which an object is moving is obtained by the formula $v = d/t$ (speed equals distance over time); the result of $f'(a)$ only means a value for y when x is a; and in $f(x) = 3x^2$, $f\ (x)$ by itself means function. Finally, some theoretical implications are discussed in the study, as well as some guidelines for teaching-learning that take as central object to mathematical connections.

Resumen

El presente escrito responde tres preguntas de investigación: (1) ¿Qué conexiones matemáticas hacen los estudiantes del preuniversitario al resolver tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral?, (2) ¿Qué relación guardan esas conexiones matemáticas que los estudiantes del preuniversitario hacen en las tareas de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral y cómo contribuyen a la comprensión matemática del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)?, y (3) ¿Qué concepciones alternativas aparecen cuando los estudiantes del preuniversitario resuelven tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral?

En el estudio se acepta que existe una fuerte relación entre los sistemas de creencias, las conexiones matemáticas y la comprensión matemática. Las conexiones matemáticas se asumen como un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Las conexiones matemáticas emergen cuando los estudiantes resuelven tareas específicas y pueden ser identificadas en sus producciones escritas o en los argumentos orales o gestuales que desarrollan. Por otra parte, se acepta que los sistemas de creencias previos de los estudiantes pueden provocar en ellos la aparición de concepciones alternativas. Éstas se entienden como aquellas concepciones de los estudiantes inconsistentes con lo que la comunidad matemática acepta como correctas y que han sido socialmente compartidas y negociadas. Las concepciones alternativas pueden significar un obstáculo en el momento en que se pretenden hacer conexiones matemáticas y consecuentemente obstaculizar la comprensión matemática.

Por otra parte, para la colecta de datos se utilizaron las Entrevistas Basadas en Tareas que plantearon tareas de derivada y de integral en los registros algebraicos, gráficos y problemas de aplicación. Mientras que para analizar los datos se utilizó el análisis temático. El análisis de las producciones (escritas, verbales y gestuales) de los 25 participantes permitió identificar 347 conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que los estudiantes hicieron. Entre estas, las más frecuentes fueron: la derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$, la integral de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$

es $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, la derivada y la integral son operaciones inversas, en una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada, la integral está asociada con el área bajo una curva, la derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función y, la integral de la función aceleración de un objeto es su velocidad y la integral de la función velocidad es su posición. Las conexiones matemáticas identificadas fueron categorizadas como de tipo: procedimental, representaciones diferentes, característica, reversibilidad, significado y, parte-todo. Asimismo, las conexiones matemáticas identificadas estuvieron fuertemente relacionadas por lo que forman sistema de conexiones matemáticas asociadas al TFC y al concepto función.

Además, las producciones escritas y verbales de los estudiantes indicaron la presencia de 67 concepciones alternativas distribuidas en 9 categorías. Entre estas, las más frecuentes son: la derivada de la integral de una función polinomial (o viceversa) se obtiene calculando la derivada y la integral por separado, ignorando el sentido reversible de ellas; la velocidad instantánea a la que se desplaza un objeto se obtiene mediante la fórmula $\boldsymbol{v} = d/t$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo); el resultado de $f'(a)$ sólo significa un valor para *y* cuando *x* vale a; y en $f(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función. Finalmente, algunas implicaciones teóricas se discuten en el estudio, así como algunas pautas para la enseñanza-aprendizaje que tome como objeto central a las conexiones matemáticas.

Introducción

Las conexiones matemáticas son un tema vigente dentro de la investigación en Matemática Educativa que ha mostrado una variedad de resultados obtenidos tanto en estudiantes como en profesores. De manera general, las conexiones matemáticas implican establecer relación entre distintos objetos matemáticos, entre estos con los de otras disciplinas o con la resolución de problemas planteados en diversos contextos. Esta forma de concebir a los contenidos matemáticos desarrolla la perspectiva de un campo integrado (Evitts, 2004; Jaijan & Loipha, 2012), además, posibilitan que los estudiantes hagan conexiones matemáticas y tengan una mejora en su compresión matemática (Mhlolo, 2012; Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2011). Por ello, se entiende la importancia que han cobrado las conexiones matemáticas en el currículum tanto mexicano de otros países, así como en la investigación misma.

La revisión de la literatura indica una desatención al campo del Cálculo y al nivel preuniversitario en cuanto al estudio de conexiones matemáticas se refiere. Esto plantea la importancia de investigar acerca de las conexiones matemáticas que los estudiantes de este nivel hacen al resolver tareas de Cálculo, en particular de la derivada y de la integral. La razón de esto es porque son dos conceptos claves del Cálculo, cuya conexión matemática está cifrada en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), pero, además, porque se desconoce qué conexiones matemáticas hacen los estudiantes cuando resuelven tareas que involucran estos contenidos que son fundamentales para cursos más avanzados.

Sin embargo, cuando los estudiantes resuelven tareas específicas es imposible que no emerjan falsas ideas o concepciones alternativas; por ello, también estas son exploradas en este estudio. Esto porque se parte de que las creencias de los estudiantes preceden a las conexiones matemáticas que estos son capaces de hacer, pero también porque pueden provocar que aparezcan las concepciones alternativas. Asimismo, se asume en el escrito que tanto las conexiones matemáticas como las concepciones alternativas pueden comprometer el logro de la comprensión matemática. Por las razones antes esgrimidas, la presente investigación planteó los siguientes tres objetivos:

- Describir y categorizar las conexiones matemáticas que los estudiantes del preuniversitario hacen al resolver tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral.

- Establecer las relaciones que guardan esas conexiones matemáticas que los estudiantes hacen asociadas al nivel de comprensión sobre el TFC que logran en las tareas propuestas.
- Identificar las concepciones alternativas que aparecen cuando los estudiantes del preuniversitario resuelven tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral.

Para dar cumplimiento a estos objetivos se concibió la presente investigación de tipo cualitativa. Esto se expone de manera pormenorizada en este trabajo que se estructura en 5 capítulos. En el Capítulo 1 se presentan las preguntas de investigación, los objetivos y, en general, la problemática asociada a las conexiones matemáticas y a las concepciones alternativas en relación con los contenidos de derivada e integral. Asimismo, se presenta un panorama de los programas de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral del nivel preuniversitario sobre las conexiones matemáticas que son promovidas. Finalmente, en este capítulo se presenta la justificación de la presente investigación.

En el Capítulo 2 se describen los constructos teóricos sobre los cuales está basada esta investigación. En particular, se discute la relación entre las creencias y las conexiones matemáticas, entre las creencias y la comprensión matemática, así como entre las conexiones matemáticas y la comprensión matemática. Asimismo, se define cada constructo teórico que fue utilizado en esta investigación. En la sección final de este capítulo se presentan algunas ideas asociadas al TFC.

En el Capítulo 3 se expone de manera detallada la forma en que fue concebida esta investigación. En ese sentido, se describen las primeras consideraciones para el diseño de la investigación, la validación de una prueba piloto para lograr la asequibilidad de las tareas propuestas, el contexto de la investigación y los participantes, las características finales de las tareas que fueron consideradas, así como los objetivos de estas. También, en este capítulo se presenta detalladamente cómo se hizo el análisis de los datos. Se ofrecen ejemplos de cómo se concretó este análisis.

En el capítulo 4 se describen los resultados identificados a partir de las producciones escritas, verbales y gestuales de los participantes. En ese sentido, primero se presentan las conexiones matemáticas con sus respectivas descripciones y evidencias, posteriormente se presenta una categorización de los resultados por tipología de conexiones matemáticas y, se muestran los sistemas de conexiones matemáticas que se construyeron a partir de las conexiones matemáticas que los estudiantes hicieron. Igualmente, en este capítulo se presentan las concepciones alternativas que aparecieron con las respectivas evidencias que soportan a los resultados.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presenta la discusión y la conclusión de esta investigación. De esta forma, se comparan los resultados obtenidos en este trabajo a la luz de la literatura que explora conexiones matemáticas y concepciones alternativas, así como una discusión entre los resultados mismos. En esta sección también se presentan algunas contribuciones teóricas de este trabajo, se hace un breve bosquejo de las implicaciones para la enseñanza-aprendizaje del Cálculo a la luz de estos resultados y, posteriormente, se describen las limitaciones teóricas-metodológicas de esta investigación.

Contenido

Capítulo 1

Preguntas de investigación, Objetivos y Antecedentes

1.1 Preguntas de investigación y objetivos

Las conexiones matemáticas han sido objeto de estudio desde diversas perspectivas, ya sea centrados en el profesor, en los estudiantes o en propuestas de enseñanza; sin embargo, el grueso de esos estudios se enfoca en otros temas matemáticos diferentes a las ideas centrales del Cálculo. La literatura indica al menos cuatro enfoques para estudiar conexiones matemáticas: a través de problemas de modelado o problemas de aplicación (Lockwood, 2011; Jaijan & Loipha, 2012; Özgen, 2013a; NTCM, 2014; DGB, 2013a, 2013b; Yoon, Dreyfus & Thomas, 2010; Dolores & García-García, 2017), mediante el tránsito entre registros de representación (Businskas, 2008; Mhlolo, 2012; Mhlolo, Venkat & Schäfer, 2012; Özgen, 2013; Moon et al., 2013; DGB, 2013a, 2013b; NTCM, 2014), al resolver tareas específicas de distintos dominios matemáticos (Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2011, 2013; Lockwood, 2011; Mhlolo, Venkat & Schäfer, 2012; Jaijan & Loipha, 2012) y, mediante las creencias que estudiantes y profesores tienen sobre las conexiones matemáticas con el mundo real y el uso de ella en el aula de clases (Ji-Eun, 2012; Soltani, Mohammad-Hassan, Shahvarani & Manuchehri, 2013; Ozgen, 2013b; Karakoç & Alacacı, 2015).

Por otra parte, las Matemáticas por su naturaleza misma, sus contenidos están conectados unos con otros, sin embargo, para fines de enseñanza-aprendizaje, tanto en los programas de estudio como en los libros de texto, se presenta en campos separados y, por lo tanto, es posible que activen creencias distintas para cada dominio (Drageset, 2010) y provoque que los contenidos matemáticos sean vistos como desconectados uno de otros

(Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan y Loipha, 2012). Como consecuencia, las situaciones habituales en el aula de clases activan la creencia de la no comprensión (Schlöglmann, 2005). Esto, en parte, justifica que estudiantes y profesores presenten dificultades para hacer conexiones matemáticas (Mhlolo, 2012; Mhlolo et al., 2012; Özgen, 2013a; Moon et al., 2013; Bajracharya, 2014; Radmehr & Drake, 2017; Dolores & García-García, 2017) y que, en diversas tareas, incluso en las gráficas, haya persistencia en el uso de representaciones algebraicas (Dawkins & Mendoza, 2014; Hong & Thomas, 2015) por el privilegio que se le concede al aprendizaje memorístico y procedimental en situación escolar (Glass, 2002).

En ese sentido, es pertinente seguir investigando en esa línea para identificar qué conexiones matemáticas hacen los estudiantes del preuniversitario al trabajar diversas tareas en Cálculo. La razón de esto es porque, además de los escasos trabajos que abordan conjuntamente el tema de conexiones matemáticas y las ideas centrales del Cálculo (derivada e integral), ambos juegan un papel preponderante en el aprendizaje de los estudiantes: las conexiones matemáticas son importante para que los estudiantes desarrollen una mejor comprensión matemática (Singletary, 2012; Businskas, 2008; Mhlolo, 2012; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011) y el Cálculo, es fundamental para la comprensión de ideas matemáticas más avanzadas como los contenidos de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Matemático, Variable Compleja, por citar algunos. Además, como lo sugieren Dolores & García-García (2017) ¿son conscientes los estudiantes de la relación de reversibilidad entre la derivada y la integral o resuelven mecánicamente las tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) que involucra esta conexión matemática? Por tanto, la primera pregunta de investigación que se plantea en el presente es:

- **¿Qué conexiones matemáticas hacen los estudiantes del preuniversitario al resolver tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral?**

En este trabajo se asume que una respuesta correcta no implica que el estudiante hace una conexión matemática, pero el uso de conexiones matemáticas implica respuestas consistentes desde un punto de vista matemático (García-García & Dolores-Flores, 2017a) y son útiles para mejorar la comprensión matemática (Businskas, 2008). Esa utilidad es evaluada por el experto (profesor de Matemáticas o el investigador). Por otra parte, también se asume que "las conexiones matemáticas son producto del sistema de creencias atribuido al estudiante, por lo que cada estudiante hará conexiones matemáticas en un nivel diferente" (García-García & Dolores-Flores, 2017a, p. 4).

Esa variabilidad en la frecuencia de cada conexión matemática reflejará el nivel de comprensión que cada estudiante puede lograr. Asimismo, dado que "nadie tiene una creencia en la independencia total de todas las otras creencias, las creencias siempre ocurren en grupos o conjuntos" (Green, 1971, p. 41), entonces si los estudiantes establecen conexiones matemáticas estas podrían también formar sistema de creencias matemáticas, dado que las creencias preceden y posibilitan establecer conexiones matemáticas. Por tanto, surge una segunda pregunta de investigación:

- **¿Qué relación guardan esas conexiones matemáticas que los estudiantes del preuniversitario hacen en las tareas de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral y cómo contribuyen a la comprensión matemática del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)?**

Finalmente, si las conexiones matemáticas son producto del sistema de creencias atribuido a cada estudiante, además de que son útiles para la mejora de la comprensión y, un estudiante comprende un concepto matemático cuando, sobre el análisis de la evidencia disponible, el sistema de creencias atribuido al estudiante es consistente con las creencias culturalmente aceptadas sobre el concepto (Kastberg, 2002); entonces, tiene sentido abordar aquellas respuestas de los estudiantes en las que no establecen una conexión matemática, así como los posibles orígenes de las mismas. Concebir a la comprensión matemática en el sentido de Kastberg y el origen de las conexiones matemáticas en el sentido ya descrito, permite plantear que cuando el sistema de creencias atribuido al estudiante es inconsistente con las creencias culturalmente aceptadas sobre el concepto (lo que conduce a no establecer conexiones matemáticas) entonces en las respuestas de los estudiantes aparecen concepciones alternativas. Esto conduce a una tercera pregunta de investigación:

- **¿Qué concepciones alternativas aparecen cuando los estudiantes del preuniversitario resuelven tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral?**

Las tres preguntas de investigación previas conducen a los siguientes objetivos generales:

- Describir y categorizar las conexiones matemáticas que los estudiantes del preuniversitario hacen al resolver tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral.
- Establecer las relaciones que guardan esas conexiones matemáticas que los estudiantes hacen asociadas al nivel de comprensión sobre el TFC que logran en las tareas propuestas.
- Identificar las concepciones alternativas que aparecen cuando los estudiantes del preuniversitario resuelven tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral.

En líneas previas se planteó a grandes rasgos la importancia del estudio, así como su pertinencia; sin embargo, enseguida se ofrece una revisión de la literatura para ofrecer mayores argumentos sobre la pertinencia del trabajo que se expone.

1.2 Revisión de la literatura

Una revisión de la literatura más actual (de 2010 a la fecha) indica que las investigaciones que exploran conexiones matemáticas no lo hacen en el campo del Cálculo, aquellas que examinan la relación entre la derivada y la integral se enfocan principalmente en el TFC, pero no se interesan en las conexiones matemáticas que hacen los estudiantes propiamente y, finalmente, hay investigaciones que exploran las creencias asociadas a la relación entre las conexiones matemáticas con el mundo real. Estos estudios se centran principalmente en profesores en formación, profesores en servicio y con estudiantes universitarios; son escasos aquellos que exploran el quehacer de los estudiantes del preuniversitario.

Eli at al. (2011, 2013) y Businskas (2008) sugieren que es importante crear secuencias centradas en las interrelaciones entre distintos tópicos dentro de las matemáticas, además del desarrollo de planes de estudio que incluyan a las conexiones matemáticas como un objetivo explícito y establezcan con claridad cómo evaluar tales conexiones matemáticas. Hoy día, ya hay esfuerzos en ese sentido, puesto que la capacidad de hacer conexiones matemáticas es una meta común de los currículos escolares de matemáticas en muchos países. Entre ellos: Sudáfrica (Mwakapenda, 2008), Turquía (Özgen, 2013a), Israel (Leikin & Levav-Waynberg, 2007), México (DGB, 2013a, 2013b), Australia (Saywer, 2008; Marshman, 2014) y Estados

Unidos (NCTM, 2014), sólo por citar algunos. Sin embargo, la literatura indica que es un tema de investigación vigente, en particular en el campo del Cálculo.

La importancia de hacer conexiones matemáticas en el aula de clases favorece que las Matemáticas sean vistas como un campo integrado (Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan & Loipha, 2012). Para lograr ese propósito, en el contexto mexicano se plantea que la Educación Media Superior "debe dejar de lado la memorización sin sentido de temas desarticulados y la adquisición de habilidades relativamente mecánicas (DGB, 2013a, 2013b, p. 6)". En oposición a ello, busca que el estudiante articule conocimientos de diversas disciplinas e identifique sus relaciones. Si esto se consigue, los estudiantes lograrán mejorar su compresión matemática (Mhlolo, 2012; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011) y, además, estarán en mejores posibilidades para resolver problemas de aplicación. En ese sentido, Jones (2015) sugiere que es importante desarrollar la comprensión matemática en situación escolar.

1.2.1 Las conexiones matemáticas y las creencias asociadas al uso de las conexiones matemáticas

Desde que la *National Council of Teachers of Mathematics* incorporó a las conexiones matemáticas como un estándar en el currículum norteamericano (NCTM, 1991), surgieron investigaciones que las exploran en distintos niveles educativos. En ese sentido, la literatura que estudia conexiones matemáticas puede ser dividida en tres grupos: a) la centrada en los alumnos (Yoon et al., 2010; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2009; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2010; Lockwood, 2011; Jaijan & Loipha, 2012; Soltani et al., 2013; Ozgen, 2013b; Dawkins & Mendoza, 2014; Hong & Thomas, 2015), b) la centrada en los profesores o futuros profesores (Mhlolo et al., 2012; Ji-Eun, 2012; Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2011, 2013; Özgen, 2013a; Moon et al., 2013; Karakoç & Alacacı, 2015) y, finalmente c) la que presenta una propuesta de enseñanza que articulen los conceptos de derivada e integral en situación escolar (Kouropatov & Dreyfus, 2013, 2014; Ponce-Campuzano, 2013; Ponce-Campuzano & Maldonado-Aguilar, 2014).

Esta revisión indica que, las conexiones matemáticas que los estudiantes hacen pueden estar limitadas por que normalmente ven temas matemáticos como independientes y raramente *ven* que lo que han aprendido en un dominio podría ser aplicado en la comprensión de otros dominios (Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan & Loipha, 2012), además de que en situación escolar se privilegia un aprendizaje memorístico y procedimental (Glass, 2002). En ese sentido, entre las conexiones matemáticas que un experto podría esperar y las que los estudiantes realmente hacen podría existir diferencia, puesto que los estudiantes al resolver problemas suelen hacer conexiones matemáticas inesperadas (Lockwood, 2011). Resultados similares se presentan en futuros profesores, como Özgen (2013a) reporta; sus habilidades para hacer conexiones matemáticas entre dominios matemáticos, así como con otras disciplinas y con el mundo real están a un nivel bajo; esto desencadena en limitaciones para resolver problemas.

Yoon et al. (2010) centran su interés en dos aspectos clave de las conexiones matemáticas: el uso de representaciones y el modelado de situaciones no matemáticas. Yoon et al. (2010) reporta que los alumnos universitarios al determinar el valor de la antiderivada matematizan la situación para desarrollar un modelo matemático, y tratan de aplicar sus conocimientos previos de integración; sin embargo, sus conocimientos sobre la integración estaban estrechamente vinculado al contexto de la velocidad, que impedía el trabajo en otro contexto, además de sus limitaciones asociadas al uso de la integración. Por tanto, Yoon et al. (2010), además de Dawkins & Mendoza (2014) sugieren que es importante desarrollar en los estudiantes la habilidad de modelar situaciones no matemáticas.

Por otra parte, bien los estudiantes perciben el proceso de conectar las matemáticas con la vida real como importantes, también reconocen que en el aula de clases no se ha implementado suficientemente (Baki, Çatlıoğlu, Coştu & Birgin, 2009; Soltani et al., 2013). En ese sentido, sus opiniones respecto de aquellas áreas en las que podrían utilizar las matemáticas o los conceptos matemáticos en el mundo real son limitadas; estos los conduce a creer que las matemáticas y el mundo real están parcialmente conectados (Ozgen, 2013b). De esta manera, los estudiantes experimentan dificultades para conectar diversas ideas matemáticas y utilizarlas de manera coherente en la resolución de problemas (Bajracharya, 2014).

Sin embargo, esto no es propio de los estudiantes, puesto que, si bien los profesores y expertos creen que hacer conexiones matemáticas con el mundo real puede contribuir a mejorar el desempeño general y los logros de los estudiantes en Matemáticas, así como a desarrollar el conocimiento de carreras futuras (Karakoç & Alacacı, 2015), también tienen dificultades para enseñar de esa manera (Leikin & Levav-Waynberg, 2007). Asimismo, hay discrepancias en los profesores entre sus creencias y la forma en que ellos plantean o evalúan problemas con historia que incluyen hacer conexiones matemáticas con la vida real en situación escolar (Ji-Eun, 2012). En ese sentido, si los maestros no reconocen las diversas maneras en que la matemática está incrustada en la vida real, compromete las oportunidades que puedan ofrecer a los alumnos para hacer conexiones matemáticas (Garii & Okumu, 2008; Mhlolo et al., 2012).

Ji-Eun (2012) sugieren que es necesario proporcionar a los futuros profesores la oportunidad de reflexionar sobre sus creencias acerca del papel de las conexiones matemáticas con la vida real en el aula de clases. Así, como modificar libros de texto y planes de estudios en términos de desarrollo de las matemáticas y las necesidades de los estudiantes asociados a la vida real (Soltani et al., 2013). Por su parte, Leikin & Levav-Waynberg (2007) sugieren que, en el contexto de la resolución de problemas, encontrar diversas vías para llegar a la solución permite el desarrollo de habilidades para hacer conexiones matemáticas.

1.2.2 Las conexiones matemáticas entre los registros de representaciones

La investigación muestra que la enseñanza con múltiples representaciones conduce a una mejor comprensión de los conceptos (Hiebert & Carpenter, 1992), además de que juegan un papel muy importante en la resolución de problemas (Ahluwalia, 2011); sin embargo, Hong & Thomas (2015) y Dawkins & Mendoza (2014) resaltan que, incluso, los estudiantes destacados tienen predilección por las técnicas algebraicas al resolver problemas o al completar tareas gráficas. De hecho, el uso de técnicas algebraicas se manifiesta incluso cuando son inapropiadas hasta en estudiantes con mejor rendimiento escolar lo que limita su comprensión al resolver problemas o en su habilidad para transitar con fluidez entre los registros de representación (Dawkins & Mendoza, 2014). Posiblemente, esto también motive a los estudiantes a construir diferentes e idiosincrásicas imágenes y representaciones al trabajar la derivación a través de las representaciones gráficas, lo que conduce a diferentes comprensiones de las gráficas de funciones derivadas (Haciomeroglu et al., 2010).

Haciomeroglu et al. (2009) al examinar los procesos cognitivos de estudiantes de Cálculo al proporcionarle la gráfica de la derivada de una función y pedirles que esbozaran la gráfica de la antiderivada, reportan que estos no establecen una relación reversible (doble sentido) al interpretar los datos de la gráfica derivada o antiderivada. Asimismo, señalan que, desde su perspectiva, la falta de énfasis en los aspectos analíticos y visuales de estos procesos reversibles puede ser un impedimento para la comprensión conceptual de los estudiantes, puesto que como Haciomeroglu et al. (2010) señalan, la visualización desempeña un papel importante, pero puede ser engañosa sin apoyo analítico.

Por otra parte, las dificultades manifestadas por los estudiantes para realizar el tránsito entre representaciones diferentes también se identifican en los profesores. Estudios como Mhlolo et al. (2012), Mhlolo (2012), Moon et al. (2013) y Özgen (2013a) reportan que los profesores o futuros profesores utilizan representaciones imperfectas o superficiales en la mayoría de los casos, lo que desencadena en dificultades para hacer conexiones matemáticas entre diferentes representaciones. Esto trae como consecuencia que, en situación escolar, con frecuencia los maestros hagan conexiones matemáticas, pero la mayoría de ellas sean superficiales y no requieran ninguna acción o pensamiento por parte de los estudiantes (Gainsburg (2008). Estas limitaciones se agravan en el contexto de la resolución de problemas (Özgen, 2013a).

En ese sentido, Moon et al. (2013) sugieren que la formación del profesorado de matemáticas necesita más atención en cuanto al uso de las conexiones entre las representaciones y el desarrollo de grandes ideas. En cambio, Ponce-Campuzano (2013) plantea que el uso de la tecnología favorece la visualización para tratar la conexión entre la derivada y la integral en situación escolar, como también lo reconocen Bajracharya (2014) y Hong & Thomas (2015).

1.2.3 El Teorema Fundamental del Cálculo

EL TFC es esencial en el desarrollo del Cálculo (Carlson, Persson & Smith, 2003) y matemáticamente, establece la conexión matemática entre la derivada y la integral. Sin embargo, dado su complejidad teórica, los estudiantes al transitar al nivel superior en el campo de la modelización matemática y las aplicaciones presentan dificultades como: falta de conocimiento (teoría matemática y temas de otras disciplinas), dificultades en la formulación e interpretación de problemas matemáticos, así como en los procesos de comprensión, uso de representaciones, entre otras (Thomas et al., 2015). En ese sentido, los estudiantes tienen dificultades para responder preguntas relacionadas con el TFC (Radmehr & Drake, 2017), además de dificultades para vincular ideas de diferentes contextos (Rösken

& Rolka, 2007). Resultados similares se reportan en Bajracharya (2014) tanto en la comprensión del TFC como su aplicación en la resolución de problemas de Matemáticas y Física. Asimismo, los estudiantes universitarios logran trabajar con éxito integrales comunes, como la identificación de una primitiva y el cálculo de áreas, pero usualmente fallan en las cuestiones no rutinarias que requieren un moderado nivel de comprensión conceptual (Kouropatov & Dreyfus, 2013).

Para algunos autores el concepto de acumulación es central en la idea de integración y, por lo tanto, está en el centro de la comprensión de muchas ideas y aplicaciones en Cálculo (Thompson, 1994; Thompson & Silverman, 2007, 2008; Kouropatov & Dreyfus, 2013, 2014; Jones, 2015). Thompson (1994) añade que los conceptos de tasa de cambio y cambio infinitesimal son fundamentales para entender el TFC, mientras que Kouropatov & Dreyfus (2013, 2014) plantean que la acumulación y su tasa de cambio son dos caras de la misma moneda. Según Thompson (1994) y Carlson et al. (2003) un énfasis en la covariación puede ayudar al desarrollo de la comprensión del estudiante de la acumulación y su relación con el TFC. Por su parte, Thompson & Dreyfus (2016) proponen la re-conceptualización de la idea de diferencial, introduciéndola antes de la derivada en el contexto de la tasa de cambio constante en la variación lineal para apoyar a los estudiantes en la comprensión de la conexión entre la derivada y la integral a través del TFC.

Sealey (2006) y Sealey (2014) plantean que la concepción de la integral definida como el área bajo una curva es útil en la resolución de problemas sólo cuando hay una comprensión más profunda de la estructura detrás esta, es decir, de la idea de integral definida como acumulación. En ese sentido, Thompson & Silverman (2007, 2008) señalan que la mayoría de los estudiantes no reconocen la suma de Riemann como encapsulación de un proceso de acumulación y asume que, la principal fuente de sus dificultades con las funciones de acumulación es que rara vez se les enseña con la intención de que realmente lo entiendan. Mientras que para Haddad (2013), la ineficacia del conocimiento de los estudiantes está vinculada a una confusión para distinguir nociones como área, antiderivada e integral, por ejemplo, terminan tratando la integral y el área como sinónimos.

En términos coincidentes, Jones (2015) reconoce que las conceptualizaciones de los estudiantes sobre la integral definida, están relacionadas con tres interpretaciones comunes: (a) como el área bajo una curva, (b) como los valores de una antiderivada, y (c) como límite de sumas de Riemann (idea de acumulación). En ese sentido, refiere que conceptualizaciones como el área bajo una curva y el valor de una antiderivada, limitan a los estudiantes en sus habilidades para darle sentido a las integrales contextualizadas, mientras que la suma de Riemann basado en la idea de acumulación es práctico y útil para darle sentido a una variedad de aplicaciones, por ejemplo, en contextos multivariantes y físicos (Jones, 2013).

Finalmente, Garner & Garner (2001) puntualizan que las reformas actuales de Cálculo proponen un mayor énfasis en la comprensión conceptual y en la aplicación práctica, por encima de la memorización y lo procedimental. Sin embargo, ese cambio parece obstaculizar en los estudiantes que trabajan bajo esta reforma comprender la conexión matemática existente entre la derivada y la integral, en oposición a los que reciben una formación tradicional, quienes parecen tener una idea más clara de esa conexión.

1.2.4 Las concepciones alternativas en Cálculo

Lograr la comprensión conceptual de los contenidos matemáticos es uno de los objetivos declarados en la enseñanza del Cálculo (Bezuidenhout, 2001), pero la investigación ha demostrado que existen conceptos precedentes a la derivada y a la integral que causan dificultades en los estudiantes, como la razón de cambio, límite, tangente y función (Dolores, García-García & Gálvez Pacheco, 2017; Denbel, 2014; Dolores, 2004). Algunas de esas concepciones son construidas en el preuniversitario (Özkan & Ünal, 2009) que en el nivel superior se convierten en concepciones inconsistentes desde el punto de vista de las Matemáticas. Incluso, en el nivel universitario para gran número de estudiantes de Cálculo sus conocimientos y comprensión sobre límite, continuidad y diferenciación descansan en gran medida sobre hechos y procedimientos aislados, con una comprensión conceptual deficiente de las relaciones entre estos conceptos (Bezuidenhout, 2001).

Muzangwa & Chifamba (2012) reconocen que un conocimiento superficial de los conceptos de Cálculo afectará la comprensión en un gran número de disciplinas donde se aplican estos conocimientos y en las Matemáticas mismas, además de que propiciarían la aparición y persistencia de concepciones erróneas o concepciones alternativas en los estudiantes. Entre los contenidos que pueden provocar concepciones alternativas, se encuentran precisamente la derivación y la integración como lo reconocen Kaplan, Ozturk & Ocal (2015), por lo que es importante detectar esas concepciones en los estudiantes para encontrar su origen o las razones que provocan su emergencia. De acuerdo a Confrey (1990), los estudios centrados en las preconcepciones argumentan que, para entender lo que los estudiantes aprenderán, primero se debe determinar lo que actualmente creen. Esto es así, porque los estudiantes conectan nuevas ideas con las ideas existentes y que el conocimiento existente sirve como filtro y catalizador para la adquisición de nuevas ideas.

En este sentido, Chhabra & Baveja (2012) argumentan que es importante explorar el pensamiento de los estudiantes para identificar qué comprenden, dado que sus propias concepciones juegan un rol importante en su proceso de aprendizaje, el cual pueden obstaculizar en algún momento (Lucariello, Tine & Ganley, 2014). Por ello, la investigación sobre las concepciones de los estudiantes, así como sus funciones en el aprendizaje se ha convertido en uno de los dominios más importantes en la educación (Duit & Treagust, 2003). Por el papel que juegan en el aprendizaje, la concepción que tenga un estudiante pueda desencadenar en concepciones alternativas cuando éste intenta aprender un nuevo concepto porque este puede ser inconsistente con sus concepciones previas. Ello justificaría en parte que, algunas concepciones alternativas sean resistentes al cambio e incluso se mantengan después de una instrucción cuidadosa (Denbel, 2014; Bostan, 2016; Chi, Roscoe, Slotta, Roy & Chase 2012). También suelen ser persistentes a través de las edades y los niveles de escolaridad (Thijs & Berg, 1995).

Por otra parte, las concepciones alternativas pueden presentar algunos retos para la enseñanza y el aprendizaje porque dan a los estudiantes una falsa sensación de saber (Chhabra & Baveja, 2012). Esto es así, porque las actividades de aprendizaje de los estudiantes están influenciadas por sus creencias y comprensión de la naturaleza del saber y del aprendizaje (Greeno, Collins & Resnick, 1996). En ese sentido, sus concepciones que pueden estar profundamente arraigadas, en ocasiones, no están en armonía con las opiniones de la ciencia o están incluso en marcado contraste con ellas (Duit & Treagust, 2003). Por tanto, esas concepciones alternativas resultan obstinadas para los estudiantes porque resultan viables, útiles o funcionales en otros dominios o contextos (Fujii, 2014). Esto afecta la capacidad de los estudiantes para recordar, razonar y adquirir nuevos conocimientos (Libarkin, 2001). Como Libarkin (2001) señala, las concepciones alternativas también provocan que en algunos casos los estudiantes memoricen hechos, procedimientos y conceptos sólo para aprobar un examen, pero como lo declaran Duit & Treagust (2003), los estudiantes pueden volver a sus concepciones alternativas en otros contextos.

La importancia entonces de estudiar a las concepciones alternativas en los estudiantes radica en que comprender su naturaleza es un primer paso importante en el desarrollo de enfoques pedagógicos planificados que pueden proporcionar a los estudiantes la oportunidad de lograr la compresión conceptual (Bezuidenhout & Olivier, 2000; Bezuidenhout, 2001; Chow. 2011; Denbel, 2014). Estudiar las concepciones alternativas también permite identificar patrones de error y analizar las posibles razones que las originan (An & Wu, 2012) o su relación con los nuevos conceptos matemáticos a enseñar (Fujii, 2014). Estudiar tanto a la derivada como a la integral es importante como lo sugiere Serhan (2015), además porque las concepciones alternativas asociadas a ellas pueden convertirse en obstáculo para la construcción y comprensión de conceptos futuros (Dolores et al., 2017).

La literatura apunta que hay investigaciones que estudian concepciones alternativas de estudiantes y profesores en distintos dominios, por ejemplo, en Física (Chhabra & Baveja, 2012; Narjaikaewa, 2013: Mulhall & Gunstone, 2012), Aritmética (An & Wu, 2012; Kennedy, 2015), Álgebra (Chow, 2011; Lucariello et al., 2014) y en Cálculo (Bezuidenhout & Olivier, 2000; Bezuidenhout, 2001; Dolores, 2004; Ubuz, 2007; Muzangwa & Chifamba, 2012; Denbel, 2014; Kaplan et al, 2015; Serhan, 2015; Dolores et al., 2017). Estos últimos que se centran en Cálculo lo hacen para el nivel superior y en temas relacionadas con la derivada o con la integral, otros se centran o bien en la derivada o bien en la integral, sin embargo, ninguno de ellos estudia a ambos conceptos en el nivel preuniversitario. Por tanto, es importante centrarse en este nivel, además de que las concepciones alternativas obstaculizan que los estudiantes logren establecer algunas conexiones matemáticas que son útiles para lograr la comprensión matemática de conceptos matemáticos más avanzados.

1.3 Las conexiones matemáticas en los programas de Cálculo del preuniversitario

El programa de estudio de Cálculo diferencial propuesto por la Dirección General de Bachillerato (DGB, 2013a) como resultado de la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) indica las competencias genéricas, disciplinares básicas, disciplinares extendidas y profesiones que todo bachiller debe desarrollar. Las conexiones matemáticas están presentes en este programa, cuando se indica “se debe dejar de lado la memorización sin sentido de temas desarticulados y la adquisición de habilidades relativamente mecánicas (DGB, 2013a, 2013b, cp. 6)”. Asimismo, cuando se insiste que:

> Cada materia de un plan de estudio mantiene una relación vertical y horizontal con el resto, el enfoque por competencias establece este tipo de relaciones al promover el trabajo disciplinario, en similitud a la forma como se presentan los hechos reales en la vida cotidiana. (DGB, 2013a, p. 8).

En ese sentido, el programa de Cálculo diferencial planea en situación escolar la necesidad de hacer conexiones extramatemáticas que consideren fenómenos de carácter económico, administrativo, natural, social, con la agricultura, la ganadería y con la industria. Es decir, con situaciones de la vida real. Por su parte, el Cálculo Integral también recomienda hacer conexiones extramatemáticas con las ciencias exactas, sociales, naturales y administrativas. Es decir, entre contenidos matemáticos, entre éstos y otras disciplinas y con situaciones de la vida real. De esta manera, en ambos cursos se promueve el uso de las conexiones entre contenidos matemáticos, entre estos y otras disciplinas, y entre los contenidos matemáticos y la vida cotidiana.

Por otra parte, a partir del programa de Cálculo diferencial (DGB, 2013a) y Cálculo integral (DGB, 2013b) se obtiene que las diversas disciplinas guardan relación (conexiones extramatemáticas) con sus contenidos (Figura 1).

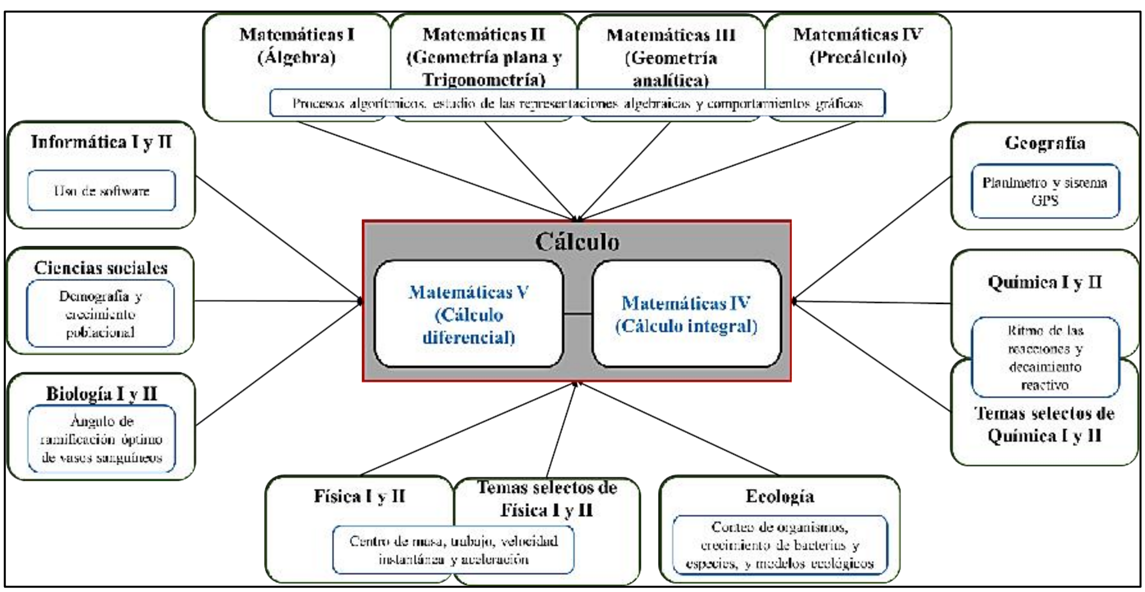


Figura 1. Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas propuestas entre el para el Cálculo.

La figura 1 indica que el Álgebra, Geometría plana y trigonometría, Geometría analítica y Precálculo le aportan al Cálculo herramientas para desarrollar procesos algorítmicos y estudiar las representaciones algebraicas y comportamientos gráficos; por su parte la Ecología le brinda información para realizar el conteo de organismos y para realizar el cálculo de crecimiento exponencial de bacterias y especies; así como, en modelos ecológicos tales como: el cálculo de crecimiento poblacional, Ley de enfriamiento y calentamiento global del planeta. Es así, como al menos en el programa de estudio se promueve el desarrollo de conexiones matemáticas.

La relación entre ambos cursos se declara en el programa de Cálculo Integral mediante la idea de función primitiva y la integral definida. Ésta última idea está relacionada con el Teorema Fundamental del Cálculo, aunque no se exponga con esos términos en el plan de Cálculo Integral.

1.4 Las conexiones matemáticas en los libros de texto

Se hizo una breve revisión de los libros de texto para identificar cómo se plantea el uso de las conexiones matemáticas en Cálculo (si es que se hace) y que rol juegan en las tareas que involucran a la derivada y la integral. Para la selección de estos libros se siguieron tres criterios: (1) que sean propuestos en los planes de estudio del preuniversitario para los cursos de Cálculo Diferencial (DGB, 2013a) e Integral (DGB, 2013b); (2) que integren en una sola obra ambos cursos, es decir, presenten al mismo tiempo el Cálculo Diferencial y el Integral; y (3) sean propuestos por editoriales de reconocido prestigio para el profesorado mexicano. Siguiendo estos criterios cuatro libros fueron elegidos para ser revisados (Tabla 1), cuyos principales resultados se presentan enseguida. En García-García & Dolores (2016) se presentan otros resultados de esta revisión.

Tabla 1. Libros de Cálculo revisados.

AUTOR(ES) Y AÑO	TÍTULO DEL LIBRO	PAÍS Y EDITORIAL
Contreras, Martínez, Lugo & Montes (2009).	Cálculo diferencial e integral.	México: Santillana.
Mora & Del Río (2009).	Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económico administrativas.	México: Santillana.
Stewart (2010).	Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos.	México: CENGAGE Learning.
Larson, Edwards & Hostetler (2002).	Cálculo diferencial e integral.	México: McGraw-Hill.

En los cuatros libros se promueve el uso de representaciones diferentes en el sentido de Businskas (2008), pero en Mora & Del Río (2009) y en Larson et al. (2002), tanto para la derivada como para la integral se propone principalmente el tránsito entre la representación algebraica a la gráfica. Mientras que en Contreras et al. (2008) también se utiliza la representación tabular y el lenguaje escrito (problemas de aplicación), similares representaciones se presentan en Stewart (2010).

La generalización se manifiesta mediante fórmulas de derivación e integración, así como la presentación de algunos teoremas que se utilizan como procedimiento para presentar algunos cálculos tanto para la derivada como para la integral en los cuatro libros. En Mora & Del Río (2009 para obtener la derivada de algunas funciones utilizan como procedimiento la definición formal de derivada y a la representación gráfica para favorecer la comprensión cuando las funciones son derivables o no, mientras que para la integral (definida) utilizan la representación gráfica mediante suma de áreas de rectángulos o de triángulos (idea de acumulación) y el TFC, mientras que para la indefinida se utiliza la idea de antiderivada (primitivas) presentada en tablas. Similares procedimientos se utilizan en Stewart (2010).

Mientras que en Contreras et al. (2008) se utiliza en algunas ocasiones la representación tabular como procedimiento para obtener la representación gráfica, que a su vez es utilizada para trazar rectángulos inscritos y circunscritos cuando se calcula la suma de Riemann, sin embargo, para la idea de antiderivada, la gráfica de f' se utiliza como procedimiento para realizar un análisis y obtener el gráfico correspondiente de f. Finalmente, en Larson et al. (2002) previo al uso de fórmulas para obtener derivadas se utiliza la definición formal de derivada como procedimiento, mientras que, para la integral primero se usa la idea de antiderivada y posteriormente, las fórmulas de integración. Para la integral definida, recurren a cuatro procedimientos diferentes: la suma de Riemann utilizando la idea de acumulación, la regla trapezoidal, la regla de Simpson y el uso del TFC.

En los cuatro libros también recibe tratamiento la conexión matemática entre la derivada y la integral en distintos momentos utilizando la idea de antiderivada y al TFC. Stewart (2010) y Contreras et al. (2008) buscan fortalecer esa relación utilizando también representaciones gráficas, es decir, a partir de la gráfica de f' se construye la gráfica de f y viceversa (Figura 2).

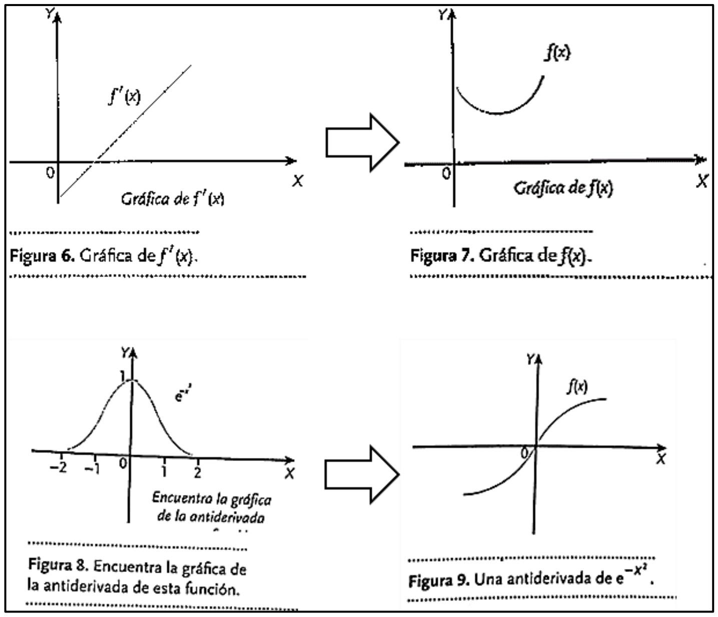


Figura 2. Conexión matemática entre la derivada y la integral en el registro gráfico propuesto por Contreras et al. (2008).

Asimismo, Larson et al. (2002) y Contreras et al. (2008) extiende esa conexión matemática al campo de la resolución de problemas y trabajan la conexión matemática entre la derivada y la integral utilizando conceptos como posición y velocidad, es decir, recurriendo a los problemas físicos que les dieron origen a ambos conceptos. Larson et al. (2002) también incorpora el cálculo de la aceleración a partir de la velocidad que lleva un objeto, pero además destaca la conexión matemática entre ambos conceptos utilizando también su significado como pendiente de una curva y como área bajo la curva (Figura 3).

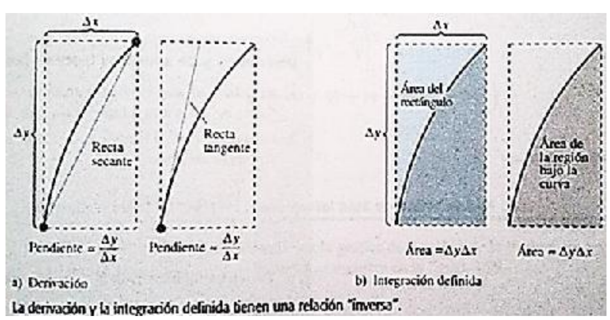


Figura 3. Representación gráfica de la reversibilidad entre la pendiente y el área bajo una curva.

Finalmente, en los cuatros libros se promueve la conexión matemática entre contenidos matemáticos, entre estos con otras disciplinas o con problemas planteados en diversos contextos (básicamente problemas de aplicación). Por ejemplo, por la orientación del libro de Mora y Del Río (2009) el énfasis se pone en la física (en problemas planteados para el alumno como ejercicios), biología y en las áreas económico-administrativas, mientras que Stewart (2010) y Larson et al. (2002) recurren a una mayor variedad de contextos. Por ejemplo, contextos de la química, biología, economía, entre otras (Stewart, 2010), la distancia recorrida por un pez, la recorrida por una sonda espacial, un deportista y la equivalencia de la energía cinética en términos de velocidad (Contreras et al., 2009), hidráulica, mecánica, economía, acústica, entre otros (Larson et al., 2002).

1.5 Justificación del estudio

A partir de la revisión presentada previamente se puede argumentar que detectar las conexiones matemáticas y las concepciones alternativas que estudiantes del preuniversitario tienen sobre la derivada y la integral es pertinente por las siguientes razones:

- La literatura que estudia conexiones matemáticas indica una desatención al campo del Cálculo y al nivel preuniversitario. La importancia de centrarse en este nivel reside en que es aquí donde los estudiantes tienen el primer contacto con la derivada y la integral que son formalizadas en el nivel superior, además de aquí perfilan su formación universitaria.
- Las conexiones matemáticas son un tema vigente dentro de la investigación en Matemática Educativa que ha utilizado una variedad de marcos teóricos y metodológicos. Sin embargo, hace falta obtener más datos que permitan proponer un marco para caracterizar a las conexiones matemáticas en el campo del Cálculo.
- Las conexiones matemáticas son una demanda de la currícula de diversos países, entre ellos México. En particular en el programa de Cálculo del preuniversitario.
- Los libros de texto de Cálculo promueven el uso de conexiones matemáticas, pero se desconoce cómo es promovido el uso de ellas en situación escolar por los profesores y qué conexiones utilizan los estudiantes del preuniversitario al resolver tareas específicas.
- Las concepciones alternativas pueden obstaculizar la comprensión matemática, en cambio, las conexiones matemáticas son fundamentales para lograr esta comprensión. Razón por la cual estudiar tanto a las conexiones matemáticas como a las concepciones alternativas puede brindar información importante para la investigación

respecto del papel que juegan en el aprendizaje del estudiante.

- Investigar las conexiones matemáticas y las concepciones alternativas sobre la derivada y la integral en estudiantes preuniversitarios permitirá tener un panorama sobre el nivel de comprensión que pueden lograr estos en relación con ambos temas de Cálculo.
- Conocer cómo se relacionan las conexiones matemáticas entre sí y cómo esto contribuye a la comprensión del TFC, o bien, cómo las concepciones alternativas persistentes en distintos niveles educativas obstaculizan esta comprensión.
- Estudiar conjuntamente a las conexiones matemáticas y a las concepciones alternativas permitirá conocer dos caras de una misma moneda que provoca el sistema de creencias atribuido a cada estudiante.

Capítulo 2

Marco conceptual

2.1 La relación entre las creencias, las conexiones matemáticas y la comprensión matemática

La presente investigación identifica y caracteriza a las conexiones matemáticas que estudiantes del preuniversitario hacen al resolver tareas de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral, además de describir las concepciones alternativas que se detectan en estos mismos estudiantes al resolver esas tareas. El sustento teórico del trabajo por lo tanto es la acepción de conexiones matemáticas y concepciones alternativas, ambos fuertemente relacionados con la idea de comprensión y con el constructo creencias. De esta forma, estos constructos teóricos en su conjunto, permiten interpretar los resultados, además de servir de guía para el diseño de la investigación. Estos elementos teóricos serán abordados brevemente destacando la relación entre ellos a partir de la literatura especializada en Matemática Educativa.

2.1.1 Creencias y comprensión matemática

A partir de las experiencias y las percepciones que percibe una persona del mundo que le rodea, saca sus conclusiones sobre diferentes fenómenos y su naturaleza que constituirán parte de su conocimiento personal, es decir, de sus creencias (Pehkonen, 1994). Coincidente con esta postura, Philipp (2007) señala que el conocimiento se constituye por las "creencias sostenidas con certeza o justificadas como creencias verdaderas" (p. 259). En ese sentido, “lo que es conocimiento para una persona puede ser creencia para otra” (Philipp, 2007, p. 259).

Para Drageset (2010) las creencias están estrechamente relacionadas con el conocimiento, de hecho, no sólo están conectados, sino que se fortalecen mutuamente. Por ello, distinguir el conocimiento de las creencias es una tarea difícil, pues están inextricablemente entrelazados (Pajares, 1992). En ocasiones, las personas pueden ser inconscientes de sus creencias y, en otras pueden esconderlas del escrutinio externo, porque en su opinión no satisfacen las expectativas de alguien más (Furinghetti & Pehkonen, 2002). Por lo tanto, se coincide con Schlöglmann (2005) cuando sugiere que, es necesario hacer conscientes al estudiante de la importancia de sus propias creencias.

Los autores anteriores plantean la existencia de una fuerte relación entre creencias y conocimiento. Para Furinghetti & Pehkonen (2002) hay dos tipos de conocimiento: objetivo y subjetivo. El primero está referido a la estructura generalmente aceptada de las matemáticas, mientras que el *subjetivo* es aquél que posee el individuo, ya que se basa en sus experiencias personales y su comprensión. De esta forma, Furinghetti & Pehkonen asumen que las creencias son parte del conocimiento subjetivo de un individuo. Están relacionadas con el contexto en el que se desenvuelve el sujeto. Con esas consideraciones, Pehkonen & Pietilä (2003) asumen que las creencias de un individuo se entienden como su conocimiento subjetivo, basado en la experiencia, a menudo implícito, y en las emociones.

Por su parte, Amirali (2010) considera que las creencias y las concepciones de un individuo están fuertemente relacionadas, pues asumen que, las concepciones son creencias cognitivas y afectivas conscientes e inconscientes, significado personal, imágenes mentales y preferencias construidas a partir de experiencias dentro y fuera de la escolarización. En ese sentido, cuando los estudiantes entran a la instrucción formal, lo hacen provistos de concepciones y creencias producto de su relación con el contexto que les rodea (Confrey, 1990), que resultan fundamentales para el aprendizaje posterior en las lecciones formales porque hay interacción entre el nuevo conocimiento que los estudiantes encuentran en la clase y su conocimiento existente (Chow, 2011).

En el plano matemático y en situación escolar, Kastberg (2002) señala que, cuando un concepto se presenta a un estudiante, éste intenta darle sentido utilizando sus conocimientos previos y de los recursos disponibles, es decir de sus creencias. Esos intentos por darle sentido a sus resultados se constituyen en una colección de creencias que tiene sobre el concepto matemático en cuestión. Estas se incorporarán a su sistema de creencias (Pehkonen, 1994). De esta manera, las creencias formarán parte de un sistema de creencias o *clusters* (estructura), ya que, como señala Green (1971), "nadie tiene una creencia en la independencia total de todas las demás creencias. Las creencias siempre ocurren en conjuntos o grupos" (p. 41).

Para efectos de este trabajo se asume que una creencia es "el juicio de un individuo sobre la verdad o la falsedad de una proposición" (Pajares, 1992, p. 316) que han sido formadas tanto por experiencias escolares como extraescolares. Asimismo, se acepta que las creencias están fuertemente relacionadas con la comprensión tal como lo sugiere Kastberg (2002). En ese sentido, es pertinente aceptar que las creencias tienen cierto grado de estabilidad, pero que en determinado momento pueden estar abiertas al cambio (Furinghetti & Pehkonen, 2002).

Dado que las creencias están más asociadas al domino cognitivo (Sierpinska, 1994; Philipp, 2007; Drageset, 2010) igual que la comprensión matemática (Hiebert & Carpenter, 1992; Dreyfus, 2002), entonces un estudiante podría externarlas (Kastberg, 2002). Al igual que las creencias, la comprensión puede cambiar, pero también puede llegar a ser más o menos consistente con el punto de vista matemático estándar del concepto. La comprensión implica una secuencia de procesos que siempre utiliza el sistema de creencias previo (Maier & Steinbring, 1998; Kastberg, 2002); sobre esta base se produce nuevo conocimiento. De esta forma, la comprensión es un proceso individual y autónomo de construcción de significado y conocimiento (Maier & Steinbring, 1998), por lo que se alcanza a un nivel diferente en cada estudiante.

Si bien es cierto que la comprensión matemática es una construcción individual, Schlöglmann (2005) destaca el papel que juega el profesor y la interacción de un estudiante con sus pares, es decir, añade un componente social. Esta investigación se adhiere a esta postura en el sentido de que se acepta que:

> si bien la comprensión es el resultado del proceso autónomo de un alumno, este proceso es en la mayoría de los casos interactivo, y es estimulado por las

actividades del profesor, así como por los comentarios de otros alumnos de la clase (Schlöglmann, 2005, p. 446).

Finalmente, para Kastberg (2002) la comprensión de un estudiante sobre un concepto matemático es su colección de creencias privadas sobre el concepto, de tal forma que, cuando sobre la base de un análisis de la evidencia disponible, el sistema de creencias atribuido al estudiante es consistente con las creencias aceptadas culturalmente sobre el concepto, entonces se puede decir que un estudiante comprende un concepto matemático (Kastberg, 2002). Son las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y las creencias específicas acerca de los conceptos las que rigen su aprendizaje y forman su comprensión de los conceptos. Este trabajo se adhiere a esta postura sobre el constructo comprensión matemática.

2.1.1.1 Sistema de creencias

Cuando un individuo adopta una nueva creencia, automáticamente formará parte de la estructura más amplia de su conocimiento personal, es decir, de su sistema de creencias (Pehkonen, 1994). De esta forma, las creencias formarán parte de un *sistema de creencias* o estructura de *clusters* (grupos), como lo reconoce Green (1971). Esta estructura permite a los individuos incluso mantener creencias en conflicto dentro de su propio sistema de creencias. Asimismo, es probable que se desarrollen *clusters* distintos cuando las creencias surgen en contextos independientes (Green, 1971).

Green describe al sistema de creencias como una estructura tales que algunas son primarias y otras derivadas. Para Green (1971) cuando a un individuo se les pregunta su razón para creer una proposición particular, éste normalmente responderá con otra declaración de creencia; este proceso puede repetirse hasta que finalmente llegue a una creencia para la cual no tenga más justificación, es decir, no pueda recurrir a otra creencia para justificarla. Esta última creencia, para la cual ya no tiene justificación, es una *creencia primaria* de la cual se derivan otras en cadena. En ese sentido, la postura de Drageset (2010) es consistente con la de Green al aceptar que “las creencias derivadas son las creencias que se basan en otras creencias” (p. 32).

Drageset (2010) señala que, en un sistema de creencias, algunas creencias se mantienen más fuerte que otras. En ese sentido, algunas son centrales y otras periféricas. Green señala que las creencias más fuertemente sostenidas son centrales, es decir, son resistentes al cuestionamiento y al cambio. En oposición a ello, aquellas creencias sostenidas con menos fuerza son las periféricas, por tanto, “están más abiertas a la discusión, al examen y al cambio” (Drageset, 2010, p. 32). Por su parte, Pajares (1992) define la centralidad en términos del grado de conexión de una creencia con otras. Sugiere que mayores conexiones definen una mayor centralidad. No obstante, la centralidad relativa de las creencias varia con el contexto (Green, 1971).

2.1.2 Comprensión matemática y conexiones matemáticas

Para los propósitos de la presente investigación se asume que las conexiones matemáticas forman la columna vertebral de la comprensión matemática (Stekete & Scher, 2016). La comprensión está determinada por la capacidad del estudiante para hacer conexiones matemáticas (Hiebert & Carpenter, 1992; Good, MacCaslin & Reys, 1992; Silver, Mesa, Morris, Star & Benken, 2009) o en las palabras de Noss, Healy & Hoyles (1997) las conexiones matemáticas promueven el desarrollo del conocimiento y la construcción de la comprensión. En ese sentido, para examinar la comprensión de alguien sobre un concepto matemático, las conexiones matemáticas que realice, además de la fuerza de ellas para la representación interna del individuo es un buen indicador (Boaler, 2002; Berry & Nyman, 2003; Patterson & Norwood, 2004; Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009).

Para Hiebert & Carpenter (1992) la comprensión matemática es como una red interna de las representaciones de las ideas matemáticas, los procedimientos y los hechos, en los que hay dos tipos de conexiones. La primera, se basa en las semejanzas y diferencias entre diferentes representaciones externas o dentro de una misma forma de representación y la segunda, se refiere a las relaciones jerárquicas como las que hay entre casos particulares y generales. Así, la más fuerte conexión que se construye es la comprensión matemática que se logra. Consistente con esta postura, Barmby et al. (2009) sugieren que, la comprensión se desarrolla a través de las conexiones realizadas entre las diferentes representaciones internas, además de ser capaz de razonar sobre ello.

En cambio, Eli et al. (2011) señala que, la construcción y la comprensión de los conceptos matemáticos, ideas, hechos o procedimientos implica hacer conexiones entre el conocimiento antiguo y lo nuevo, es decir, requiere de los estudiantes su sistema de creencias previo. Consistente con esta postura, Mousley (2004) señala que hacer conexiones matemáticas es una actividad importante en el aula para construir la comprensión matemática, además de que los significados matemáticos derivan de realizar conexiones matemáticas (Noss et al., 1997). Cai & Ding (2015) añaden que algunas características de la comprensión matemática son: es tanto un proceso de comprensión (o saber) y un resultado del acto de entender (a veces llamado "conocimiento"); es al mismo tiempo la realización de conexiones matemáticas y un resultado de realizar las conexiones; es un proceso dinámico y continuo; la comprensión puede tener diferentes niveles y diferentes tipos; y el objetivo es alcanzar una profunda comprensión de las matemáticas. Estos autores resaltan de manera directa la relación entre comprensión matemática y conexiones matemáticas.

Para efectos de este estudio, se acepta que la comprensión matemática pertenece al dominio cognitivo de una persona tal como lo señala Hiebert & Carpenter (1992) y Dreyfus (2002), sin embargo, se difiere con Hiebert & Carpenter (1992) en el hecho de que hay sólo dos tipos de conexiones: entre representaciones y entre relaciones jerárquicas. Asimismo, la postura que se adopta en esta investigación es consistente con Cai & Ding (2015) y Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, et al. (1997) en el sentido de que la comprensión puede cambiar y que puede tener diferentes niveles en los estudiantes.

En este estudio se acepta que la comprensión matemática y las conexiones matemáticas están fuertemente ligadas, de hecho, se asume que sin conexión matemática no hay comprensión y sin comprensión no hay conexión matemática (García-García & Dolores-Flores, 2017a). Es decir, un estudiante que tiene *cierta* comprensión será capaz de hacer conexiones matemáticas entre ideas, conceptos, procedimientos, representaciones y significados entre sí. Para ello, se apoyará de su sistema de creencias (García-García & Dolores-Flores, 2017a) o en términos de Latas y Moreira (2013), Mhlolo (2012) y, Eli et al. (2011) en conocimientos o experiencias previas.

Finalmente, se asume que la comprensión matemática es un nivel superior de aprendizaje –meta de la educación escolar– en comparación con las conexiones matemáticas, es decir, comprensión matemática y conexión matemática no son sinónimos. Sin embargo, la habilidad de hacer conexiones matemáticas sirve como puente y son fundamentales para lograr cierta comprensión matemática en los estudiantes. Para Hiebert et al. (1997) hay dos procesos cognitivos que son claves en los esfuerzos de los estudiantes para lograr cierta comprensión: la reflexión y la comunicación. Esta investigación asume que los mismos procesos son esenciales en el proceso de hacer conexiones matemáticas.

2.2 ¿Qué son las conexiones matemáticas?

En la literatura educativa no existe consenso respecto de lo que significa conexión matemática. Sin embargo, hay esfuerzos que apuntan a su caracterización. Asimismo, hay acuerdos en que hacer conexiones matemáticas entre las diferentes ramas de la matemática y entre éstas con diversas disciplinas y con situaciones de la vida real es una meta frecuentemente establecida para la educación matemática (Evitts, 2004; Özgen, 2013a; Stekete & Scher, 2016). Esto es así, porque como Boaler (2002) señala, establecer conexiones matemáticas no es algo que los estudiantes necesiten *saber*, sino que es algo que necesitan *hacer*.

Las conexiones matemáticas han estado presentes en los estándares de educación del mundo; sugiriendo a los profesores permitir a los alumnos reconocer y hacer *conexiones* entre ideas matemáticas relacionables (Mhlolo, 2012; NTCM, 2014). Por ejemplo, la NCTM (2000), en sus principios y estándares, establece que los estudiantes hasta el grado 12 deberán:

- Reconocer y usar las conexiones entre las ideas matemáticas
- Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y se construyen unas sobre otras para producir un todo coherente;
- Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos fuera de las matemáticas (p. 64)

Por su parte, el currículum mexicano plantea que la Educación Media Superior "debe dejar de lado la memorización sin sentido de temas desarticulados y la adquisición de habilidades relativamente mecánicas (DGB, 2013a, 2013b, p. 6)". Es decir, se sugiere desarrollar la habilidad de hacer conexiones matemáticas.

En relación con la definición del constructo conexión matemática se encuentran posturas como: "conexión es una relación o asociación causal o lógica, una interdependencia" (Brown, 1993, p. 481), las conexiones matemáticas implican establecer relaciones entre distintos objetos matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2003; Latas & Moreira, 2013), las conexiones matemáticas son como "redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos[1]. Dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones" (De Gamboa & Figueiras, 2014, p. 340). Estas posturas resaltan el carácter interrelacional entre los contenidos matemáticos, aunque De Gamboa & Figueiras (2014) se centra mayormente en una tipología de las conexiones matemáticas, a saber, las representaciones asociadas a los conceptos matemáticos, sus propiedades y los procedimientos que permiten trabajar en y con ellas.

Por su parte, Mousley (2004) a partir de la revisión de la literatura distingue tres interpretaciones más comunes en la literatura sobre el conocimiento conectado: las conexiones que los estudiantes hacen entre la nueva información y el conocimiento existente; las conexiones entre diferentes conceptos matemáticos y entre representaciones matemáticas; y la conexión bidireccional entre la matemática escolar y los aspectos matemáticos de contextos cotidianos o reales. Eli et al. (2011) es consistente con la postura de Mousley (2004) cuando señala que, desde una perspectiva constructivista, una *conexión matemática* puede ser vista como un enlace (o puente) en el que se utiliza el conocimiento previo o nuevo para establecer o fortalecer una comprensión de la relación(s) entre dos o más ideas matemáticas, conceptos, filamentos (*strands*) o representaciones dentro de una red mental.

En cambio, Singletary (2012) también a partir de la literatura concibe a las conexiones matemáticas: como característica fundamental de las matemáticas, es decir, como parte de una disciplina conectada por naturaleza; como producto de la comprensión y; como parte del proceso de hacer matemáticas. En este último sentido, Boaler (2002) plantea que el acto de observar relaciones y establecer conexiones, ya sea entre diferentes representaciones funcionales o áreas matemáticas, es un aspecto clave del trabajo matemático, en sí mismo. Asimismo, Businskas (2008) es consistente con la postura de Singletary (2012) pues considera que, las conexiones matemáticas son aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y, por otro lado, son las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática.

Evitts (2004) es consistente con esta última idea. Plantea que el conocimiento conectado se puede describir en términos de su construcción personal y significado, la multiplicidad de vínculos entre los conceptos y procedimientos, y el poder derivado de conocer las conexiones. Por su parte, Singletary (2012) consistente con Businskas (2008),

[1]Hace referencia a una red coordinada y coherente de conceptos matemáticos.

también asume que una conexión matemática es una relación entre una entidad matemática y otra entidad matemática o no matemática.

La literatura reconoce que se pueden hacer conexiones con el mundo real, con los conocimientos previos, con los contextos familiares dentro y fuera de la escuela, con diversos temas matemáticos, con otras disciplinas, con el pasado y el futuro (Begg, 2001; Presmeg, 2006), tal como lo establece el currículo (NTCM, 2014; DGB, 2013a, 2013b). Por tanto, se pueden vincular los temas matemáticos entre sí (conexiones intramatemáticas), entre estos y los temas de otras disciplinas o con otros contextos, particularmente en la resolución de problemas de aplicación (conexiones extramatemáticas). Este trabajo se adhiere a la sugerencia hecha por Berry & Nyman (2003) la cual señala que los estudiantes necesitan ser motivados para reflexionar sobre las conexiones matemáticas.

Las posturas presentadas previamente son complementarias entre sí y ayudan a tener una visión general en relación con lo que significa hacer conexiones matemáticas. Sin embargo, dado que este trabajo se enfoca en el quehacer de los estudiantes al resolver tareas específicas fue necesario elaborar una definición más *ad hoc* a estos propósitos y que incluyera algunas características de las conexiones matemáticas identificadas en la literatura. Por tanto, después de un análisis se llegó al consenso de que para este estudio se asume que las conexiones matemática son:

> Un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Las conexiones matemáticas emergen cuando los estudiantes resuelven tareas específicas y pueden ser identificadas en sus producciones escritas o en los argumentos orales o gestuales que desarrollan (García-García & Dolores-Flores, 2017a, p. 3).

De esta manera, se acepta en este estudio que las conexiones matemáticas pueden ser, de manera general: intramatemáticas o extramatemáticas. Además, reúnen las siguientes particularidades.

- Son relaciones correctas y son útiles en la mejora de la comprensión matemática (Businskas, 2008), es decir, no todas las relaciones que los estudiantes establecen se deben considerar como conexión matemática. Su utilidad para la comprensión es determinada por el investigador a partir de lo que dicta el currículum oficial y en función del soporte que pueden significar para los conocimientos matemáticos más avanzados donde son requeridas como bases.

- Las conexiones matemáticas son producto del sistema de creencias de los estudiantes. Por tanto, cada estudiante establecerá conexiones a un nivel diferente (García-García & Dolores-Flores, 2017a). En otras palabras, cuando el estudiante tiene mejor formado el sistema de creencias asociado a un concepto matemático y este es consistente con lo que se acepta en Matemáticas, entonces será capaz de hacer conexiones matemáticas. En caso contrario, su sistema de creencias será un obstáculo para lograr que haga conexiones matemáticas.
- Una respuesta correcta no implica que el estudiante hace una conexión matemática, pero el uso de conexiones matemáticas favorece la emergencia de respuestas consistentes desde el punto de vista matemático (García-García & Dolores-Flores, 2017a).
- Una parte importante de hacer conexiones matemáticas reside en el uso de diferentes representaciones (Businskas, 2008; Mhlolo, 2012; Mhlolo et al., 2012; Özgen, 2013a; Moon et al., 2013; NTCM, 2014); las representaciones semióticas se asumen en el sentido de Duval (2006b).
- Las relaciones lógicas como la inclusión y la generalización (Businskas, 2008) son una tipología de conexiones matemáticas.
- La modelización de algún problema no matemático también es una tipología de conexiones (Evitts, 2004). Esta conexión se presenta cuando el estudiante, partiendo de un problema (de aplicación o del mundo real), construye un modelo matemático para darle solución. Una vez que construye el modelo hace uso de diversos conocimientos (matemáticos o no) y ejecuta diversas acciones (algebraicas, gráficas, etc.) para llegar a una respuesta consistente a la situación planteada (Dolores & García-García, 2017). Esta conexión matemática se conoce como de modelado.

2.2.1 ¿Por qué es importante hacer conexiones matemáticas?

Las conexiones matemáticas son importantes porque favorecen la integración del conocimiento y la interdisciplinariedad, son útiles para resolver problemas de aplicación y problemas no matemáticos, además de que son fundamentales para lograr la compresión matemática. En ese sentido, hacer conexiones matemáticas es importante porque favorece que las Matemáticas sean vistas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas, que es como la ven los estudiantes (Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan & Loipha, 2012) y como es frecuentemente presentada cuando es objeto de enseñanza-aprendizaje. Por tanto, es imprescindible que los profesores faciliten la construcción de conocimientos conectados en el salón de matemáticas (NCTM, 2014), es decir, promover el trabajo interdisciplinario, en similitud a la forma como se presentan los hechos reales en la vida cotidiana.

Las conexiones matemáticas deben servir como herramientas en la clase de Matemáticas para afrontar diversas tareas. En ese sentido, hacer conexiones matemáticas permitiría identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas coherentes asociadas a los problemas (Garbín, 2005). Koestler, Felton, Bieda & Otten (2013) indican que, si los estudiantes pueden hacer esto, están en mejores condiciones para desarrollar una comprensión más rica y profunda del problema, así como entender a las matemáticas como un conjunto de conocimientos integrados. Para ello, se requiere que las prácticas pedagógicas conciban al conocimiento relevante, relacional y transferible (Makar, 2015). Asimismo, Presmeg (2006) considera que es importante relacionar la matemática escolar con realidades experienciales de los alumnos.

Finalmente, si los estudiantes hacen conexiones matemáticas en el proceso de aprendizaje, lograrán mejorar su compresión matemática (Mhlolo, 2012; Eli et al., 2011). Por tanto, en situación escolar se debe desarrollar en los estudiantes la habilidad de hacer conexiones matemáticas entre contenidos matemáticos, con otras disciplinas y con situaciones de la vida real. Esto se traducirá en una mejora del aprendizaje.

2.2.2 Algunos modelos para caracterizar conexiones matemáticas

En la literatura educativa no existe un modelo único que permita caracterizar a las conexiones matemática, por ello, en estudio se resumen tres modelos propuestos en la literatura revisada: el de Businskas (2008), Evitts (2004) y el planteado por Eli et al. (2011). Sin embargo, las tipologías descritas en esos escritos emergieron en las producciones de profesores en servicio o futuros profesores, pero es posible que sean extensible a las producciones verbales porque una fuente de las conexiones matemáticas es precisamente la instrucción formal que se recibe en el aula de clases.

Businskas (2008) considera una conexión matemática como una verdadera relación entre dos ideas matemáticas, A y B. Al respecto, distingue cinco categorías para estudiarlas. Estas son:

1. **Representaciones diferentes:** puede ser de dos tipos: alternas o equivalentes. A es una representación alterna de B cuando ambas están referidas a dos representaciones diferentes, tales como: simbólica-algebraica, gráfica-geométrica, pictórica-diagrama, etc. Por ejemplo, la gráfica de una parábola es una representación alterna de $f(x) = ax^2 + bx + c$ (representación gráfica-algebraica). Mientras que, A es una representación equivalente de B cuando ambas están referidas a dos formas diferentes, pero dentro de la misma representación. Por ejemplo, la representación $f(x) = ax^2 + bx + c$ es equivalente a $f(x) = a(x-p)^2 + q$.
2. **Implicación:** A implica B (es implicado por A), es decir, un concepto conlleva a otro en una forma lógica; tiene la forma si…, entonces. Esta conexión matemática indica una dependencia de un concepto con otro en forma lógica. Por ejemplo, el grado de una función polinomial determina el máximo número de ceros posibles.
3. **Relación parte-todo:** Un concepto está vinculado a otro guardando una relación de parte y de todo. Pueden ser de dos tipos: *inclusión* (A es incluido en B. Por ejemplo, un vértice es un componente de una parábola y una parábola contiene un vértice) y de *generalización* (A es una generalización de B; B es un caso específico de A. Por ejemplo, $ax^2 + bx + c = 0$ es una generalización de $2x^2 - 7x + 3 = 0$).
4. **Procedimiento:** A es un procedimiento usado cuando se trabaja con un objeto B. Por ejemplo, usar la formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para encontrar la pendiente de una recta.
5. **Conexión orientada a la instrucción:** se presenta cuando A y B son dos conceptos o habilidades que deben ser conocidos para entender o aprender C. Según Businskas, ésta se manifiesta principalmente en dos formas. En primer lugar, cuando se hace referencia a la importancia de vincular el nuevo tema con el conocimiento previo. En segundo lugar, cuando los grupos de conceptos y procedimientos matemáticos conectados entre sí se consideran prerrequisitos, habilidades o vocabulario que los estudiantes deben dominar antes de abordar el nuevo tema.

En cambio, Evitts (2004) plantea una categorización diferente para identificar las conexiones matemáticas. Su modelo, se integra de las siguientes categorías:

1. **Conexión de modelado:** esta constituye vínculos entre el mundo de las matemáticas y el real (o la vida cotidiana de los estudiantes). Según Evitts, un enfoque de modelización matemática plantea situaciones típicamente más complejas que, no necesariamente tienen una estrategia de solución prescrita y a menudo requieren ideas matemáticas de más de un área de las Matemáticas para ser resueltas.
2. **Conexión estructural:** se manifiesta, por ejemplo, cuando un estudiante observa que la suma de un número y su opuesto, y el producto de un número distinto de cero y su recíproco son inversos aditivos e inversos multiplicativos, respectivamente, ha identificado una similitud estructural. De esta forma, la conexión matemática se manifiesta cuando se reconoce la similitud de dos ideas o construcciones matemáticas.
3. **Conexión de representación:** las relaciones matemáticas pueden ser representadas en formas gráficas, numéricas, simbólicas, pictóricas y verbales. Por ejemplo, un estudiante podría representar las coordenadas: (2,3), (4, 7) y (8, 15) como tres puntos distintos en un plano de coordenadas.
4. **Conexión procedimental-conceptual:** se manifiesta cuando se vinculan conceptos matemáticos con procedimientos, disminuyendo la percepción de las matemáticas como regla-orientada. Evitts pone el siguiente ejemplo para el valor absoluto. Operativamente |4 - 5| se determina mediante el uso de alguna regla en la que los alumnos recuerdan que el valor absoluto produce valores no negativos, sin embargo, cuando se encuentran con una desigualdad como $|4-x|>3$ y si la regla de "no negativo" es la extensión de su concepto de valor absoluto, entonces resolver la desigualdad se convierte en un asunto extremadamente difícil. En cambio, si los estudiantes tienen un concepto de valor absoluto que incluye su interpretación como una distancia, entonces resolverla puede ser muy diferente de lo que lo haría sin ese vínculo conceptual.
5. **Conexión entre conceptos matemáticos:** consiste en vincular distintos conceptos matemáticos, es decir, como un todo integrado. Por ejemplo, Evitts plantea que, la

regresión lineal como una herramienta de ajuste de datos puede ser enseñada en combinación con el concepto de pendiente, lo que a su vez puede ser pensada como una velocidad de cambio o en función de un ángulo de inclinación. Aquí las ideas de análisis de datos, Álgebra, Geometría y Cálculo, tradicionalmente presentadas de manera separada, están vinculadas.

Finalmente, Eli et al. (2011) plantea otras tipologías de conexiones. En particular, reconoce las siguientes:

1. **Categóricas**: se presenta cuando se hace uso de una característica superficial, principalmente como una base para la definición de un grupo o categoría.
2. **Procedimiento**: implica relacionar ideas en base a un procedimiento matemático o algoritmo; puede incluir la descripción de los mecanismos involucrados en la ejecución de un procedimiento en lugar de las ideas matemáticas incrustadas en éste.
3. **Característica/Propiedad**: definen las características o la descripción de las propiedades de los conceptos en términos de otros conceptos.
4. **Derivación**: se utiliza el conocimiento de un concepto para construir o explicar otro concepto; incluyendo, pero no limitado al reconocimiento de la existencia de una derivación.
5. **Curricular**: implica relacionar ideas o conceptos en términos de impacto en el plan de estudios, incluyendo el orden en que se podría enseñar los conceptos / temas.

Los tres modelos expuestos tienen ciertas similitudes, por ejemplo, los tres consideran la conexión procedimental, mientras que Evitts (2004) y Businskas (2008) plantean que el uso de representaciones diferentes es una tipología de conexiones matemáticas. Sin embargo, en este estudio, no se adopta a priori ninguno de los tres modelos para analizar los datos colectados. Esto, porque no se busca encasillar *necesariamente* los resultados que emerjan en las tipologías precedentes, sino que es posible la emergencia de conexiones matemáticas aun no categorizadas. Por tanto, es a partir de los datos que se busca establecer un modelo que caracterice las conexiones matemáticas en el campo del Cálculo. Eso no significa que se ignoren las tipologías descritas anteriormente, sino que serán tomadas en cuenta si existe emergencia de estas tipologías en los datos sin ser forzados a ello.

No obstante, se acepta de antemano la existencia de dos grandes tipologías de conexiones: las *intramatemáticas* y las *extramatemáticas*. Las primeras se establecen entre ideas, conceptos, procedimientos, teoremas, representaciones y significados matemáticos entre sí (García-García & Dolores-Flores, 2017a). Mientras que la segunda tipología ocurre cuando se relaciona un concepto o modelo matemático con un problema en contexto o de aplicación o, viceversa. Incluyen las conexiones entre contenidos matemáticos con otras disciplinas curriculares y con situaciones de la vida diaria (Dolores & García-García, 2017).

2.3 Las concepciones alternativas, las conexiones matemáticas y la comprensión

Una concepción implica la comunicación de ideas sobre un concepto y afecta la manera en que el estudiante lo aplica según Kastberg (2002). De manera análoga, Thijs & Berg (1995) consideran que, se refiere a una idea individual sobre el significado que tiene un individuo sobre un concepto. De esta manera, las concepciones son desarrolladas individualmente en los estudiantes. Así, cuando un concepto matemático es presentado a un estudiante, éste intenta darle sentido utilizando sus creencias y concepciones previas.

Esos intentos por darle sentido a sus resultados se constituyen en una colección de creencias (Katsberg, 2002) que puede adecuarse al sistema previo que tiene o bien significar un obstáculo para la asimilación del nuevo concepto. En este último caso, el estudiante conserva su sistema de creencias previo, al menos temporalmente. En cambio, si alcanza un estatus más alto que el sistema previo, como lo refiere Treagust & Duit (2009) el intercambio conceptual, puede ocurrir. En ese caso, su sistema de creencias en relación con el concepto matemático se fortalece y mejora de manera significativa para posibilitar que haga conexiones matemáticas y consecuentemente, logre una mejora de su comprensión matemática. Sin embargo, esto no significa que una concepción reemplazada se olvida, sino que se puede reponer total o parcialmente en una fecha posterior (Tragust & Duit, 2009).

Para Kastberg (2002) cuando, sobre la base de un análisis de la evidencia disponible, el sistema de creencias atribuido al estudiante es inconsistente con las creencias aceptadas culturalmente sobre el concepto, entonces se manifiestan las concepciones alternativas. En general, los autores en educación matemática coinciden que las concepciones alternativas se refieren a una concepción o idea que, en algunos aspectos es contradictoria o inconsistente con el concepto según los constructos científicos bien negociados o científicamente aceptables (Confrey, 1990; Thijs & Berg, 1995; Chhabra & Baveja, 2012; Narjaikaewa, 2013) o bien, difieren del conocimiento que se propone sea aprendido (Mevarech & Kramarsky, 1997). Referente al dominio matemático, Fujii (2014) considera que las concepciones alternativas se manifiestan cuando las concepciones de los estudiantes están en conflicto con los significados aceptados en matemáticas.

En este trabajo, se asume que las concepciones alternativas son aquellas concepciones de los estudiantes inconsistentes con lo que la comunidad matemática acepta como correctas y que han sido socialmente compartidas y negociadas. Además, las concepciones alternativas pueden constituir obstáculo en el momento en que los estudiantes pretenden hacer conexiones matemáticas y consecuentemente obstaculizar la comprensión matemática (Figura 4). De esta forma, se acepta que las concepciones alternativas son las "no-conexiones matemáticas" que los estudiantes realizan al resolver tareas específicas, es decir, forman la otra cara de la moneda cuando se estudian conexiones matemáticas.

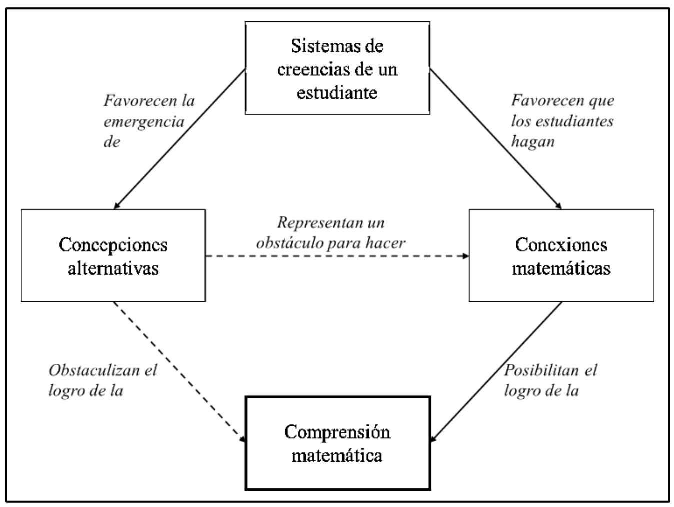


Figura 4. Relación entre las concepciones alternativas, las conexiones matemáticas y la comprensión matemática.

2.4 La derivada y la integral: dos operaciones inversas

EL TFC es esencial en el desarrollo del Cálculo (Carlson et al., 2003) y matemáticamente, relaciona a la derivada con la integral como operaciones inversas. Son a Isaac Newton y a Gottfried Wilhelm von Leibniz a quienes se les atribuye la invención del Cálculo infinitesimal (Boyer, 1949), debido a los conceptos, el simbolismo y las reglas para realizar las operaciones que suministraron (Johnson, 1997) y que fue posibilitado por la aparición del análisis infinitesimal.

De acuerdo a Ríbnikov (1987) el Cálculo Diferencial e Integral tomó en los años 1665-1666 en las obras de I. Newton la forma de la teoría de las fluxiones y en las obras de Leibniz la forma de cálculo de los diferenciales. En la teoría de las fluxiones se resuelven principalmente dos problemas:

1. Determinar la velocidad de movimiento en un tiempo dado según un camino dado, es decir, determinar la relación entre las fluxiones dada la relación entre los fluentes.
2. Dada la velocidad de movimiento determinar el camino recorrido en un tiempo dado, es decir, determinar la relación entre los fluentes dada la relación entre las fluxiones.

El primero de estos problemas implica el cálculo de la diferenciación de funciones de manera general, y la obtención de la ecuación diferencial que expresa las leyes fundamentales de la naturaleza. Mientras que el segundo, es inverso, es decir, reside en la integración de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma más general, en particular se trata de buscar funciones primitivas (Ríbnikov, 1987).

Por su parte, Leibniz partiendo de los problemas inversos de las tangentes descubrió la relación inversa entre los métodos de trazado de tangentes (referido a la operación de diferenciación) y las cuadraturas (referido a la integración). Según Ríbnikov (1987) en el plano matemático, el Cálculo de Leibniz se formaba de las siguientes premisas:

1. Problemas de la sumación de series (desde 1673) y la utilización de los sistemas de diferencias finitas;
2. Resolución de los problemas sobre tangentes, el triángulo característico de Pascal y el paso gradual de las relaciones entre elementos finitos a arbitrarios y después infinitesimales;
3. Problemas inversos de tangentes, sumación de diferencias infinitamente pequeñas, descubrimiento de la reversibilidad mutua entre los problemas diferenciales e integrales (hacia el año 1676).

Por otra parte, en una versión moderna, Stewart (2010) reproduce el enunciado del TFC de la siguiente forma:

> Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por
>
> $$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \le x \le b$$

Es una antiderivada de *f*, es decir, $g´(x) = f(x)$ para $a < x < b$.

Usando notación de Leibniz, podemos escribir este teorema como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Cuando *f* es continua (p. 369).

Asimismo, la segunda parte del TFC indica que para una f continua en $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Donde F es cualquier antiderivada de f, esto es $F' = f$.

Juntas las dos partes del Teorema Fundamental del Cálculo señalan que la derivación e integración son procesos inversos. Cada uno deshace lo que el otro hace (Stewart, 2010).

En resumen, el TFC es un claro ejemplo de hacer conexiones matemáticas como parte de una disciplina conectada por naturaleza (Singletary, 2012), dado que matemáticamente establece la conexión matemática entre la derivada y la integral. Así, incorporar el TFC como una idea central en la clase de matemáticas apoya a los estudiantes en la conexión de sus concepciones sobre derivada e integral (Thompson & Dreyfus, 2016). Por otra parte, la comprensión de este teorema en los estudiantes puede significar un gran logro para hacer otras conexiones matemáticas, para resolver problemas no matemáticos y de aplicación, además de desarrollar la perspectiva de las matemáticas como una ciencia interconectada. De esta manera, el estudiante será capaz de resolver tanto problemas matemáticos (cálculo de la pendiente de una curva y el área bajo una curva) como extramatemáticos (por ejemplo, calcular la posición de un objeto dada su velocidad y viceversa).

Finalmente, para los propósitos de este trabajo se plantearon tareas que involucraron funciones polinomiales de grado 1, 2 y 3 porque tienen su respectiva función inversa, es decir, a este tipo de funciones es aplicable el TFC y; se asume que son asequibles a los estudiantes porque son las funciones algebraicas típicas que se enseñan en un curso de Cálculo en el nivel preuniversitario. De esta manera, aunque en este estudio se exploran las conexiones matemáticas y concepciones alternativas que aparecen cuando los estudiantes resuelven tareas relacionadas con la derivada y la integral, significa una oportunidad para indagar sobre la comprensión matemática que del TFC tienen los estudiantes cuando se proponen tareas que posibilitan el uso de este teorema.

Capítulo 3

Metodología

3.1 La investigación cualitativa

La presente investigación es cualitativa. De acuerdo a Kothari (2004) este tipo de estudios se ocupa de los fenómenos cualitativos y es especialmente útil cuando se trata de descubrir los motivos subyacentes del comportamiento humano. Asimismo, la investigación cualitativa consiste en un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo que significa que se estudian los fenómenos en su contexto natural, intentando dar sentido o interpretarlos en función de los significados que las personas le dan. (Denzin & Lincoln, 2005). Merriam & Tisdell (2015) es consistente con estas posturas cuando señala que los investigadores cualitativos están interesados en comprender cómo las personas interpretan sus experiencias, cómo construyen sus mundos y qué significado atribuyen a sus experiencias.

Para Flick (2014) la investigación cualitativa puede tener tres objetivos: describir un fenómeno (puede ser las experiencias subjetivas de un individuo o grupo específico) en mayor o menor detalle, identificar las condiciones en las que se basan las diferencias o semejanzas entre varios casos (individuos o grupos) y desarrollar una teoría del fenómeno en estudio a partir del análisis de las evidencias empíricas. Algunos de estos propósitos generales planteados por Flick (2014) se persiguen en este estudio. En particular, la presente investigación, como se mencionó en el primer capítulo, planteó como objetivos:

- Describir y categorizar las conexiones matemáticas que los estudiantes del preuniversitario hacen al resolver tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral.
- Establecer las relaciones que guardan esas conexiones matemáticas que los estudiantes hacen asociadas al nivel de comprensión sobre el TFC que logran en las tareas propuestas.
- Identificar las concepciones alternativas que aparecen cuando los estudiantes del preuniversitario resuelven tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral.

3.2 Primeras consideraciones para el diseño de la investigación

Para el logro de los objetivos de esta investigación se diseñaron diversos instrumentos que permitieran obtener las respuestas naturales de los estudiantes al resolver tareas que involucraran a la derivada y a la integral, manifestando libremente sus ideas sin ser influenciados por el investigador. El proceso de diseño de los instrumentos a utilizar fue cíclico, es decir, se fue tomando decisiones en función de los resultados que se obtuvieron en la aplicación piloto de los mismos.

Para un primer diseño, se consideraron los resultados de una revisión hecha a cuatro libros de texto (Contreras et al., 2009; Mora & Del Río, 2009; Stewart, 2010; Larson et al., 2002) sugeridos por el programa de estudio del Cálculo Diferencial (DGB, 2013a) y Cálculo Integral (DGB, 2013b) para el preuniversitario mexicano, así como las sugerencias dadas en dichos programas de estudio (DGB, 2013a, 2013b) y, el enfoque de la literatura que estudia conexiones matemáticas. Con esas consideraciones se diseñaron los siguientes instrumentos que incluyeron tres registros de representación: algebraico, gráfico y lenguaje escrito (problemas de aplicación).

- **Instrumento 1.** Su objetivo fue explorar las conexiones matemáticas que los estudiantes hacen en el registro algebraico porque es el que recibe mayor énfasis tanto en los libros de textos como en el aula de clases. Planteó tareas de derivadas, integrales, derivada de una integral e integral de una derivada considerando funciones polinomiales.

- **Instrumento 2**. Su objetivo fue identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes hacen en el registro gráfico. Se estructuró en dos apartados: en el primero se ofrecen las gráficas de ciertas funciones y se piden las gráficas de la derivada; mientras que, en la segunda parte, se ofrece la gráfica de la derivada de cierta función y se pide la construcción de la gráfica de la función antiderivada.
- **Instrumento 3.** Planteó como objetivo identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes hacen al resolver problemas de aplicación que evocan conceptos matemáticos, físicos, biológicos y económicos, cuya solución podría ser hallada usando la derivada o la integral. Estos problemas fueron planteados considerando el tipo de situaciones propuestas en los libros de texto de Cálculo y las sugerencias dadas en el programa de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral.
- **Instrumento 4.** El objetivo de este instrumento fue también identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes hacen al resolver problemas de aplicación evocando los mismos conceptos que el instrumento 3, sin embargo, a diferencia de aquél, en este se plantearon situaciones modeladas por gráficas sin sus respectivas representaciones algebraicas.
- **Instrumento 5.** Este planteó un objetivo más general que los instrumentos anteriores, pues pretendía identificar conexiones matemáticas que los estudiantes hacen al resolver tareas que consideran los tres registros de representación algebraicas, gráficos y problemas de aplicación.

3.1.1 Aplicación piloto y resultados

La aplicación piloto de los instrumentos fue una etapa importante para rediseñarlos en caso de que los resultados así lo sugirieran. Asimismo, con ello se buscó identifica qué tareas eran asequibles o no a los estudiantes con el fin de realizar los cambios necesarios que posibilitaran extraer las conexiones matemáticas y concepciones alternativas que aparecen en ellos cuando resuelven las tareas propuestas. Para ello, los cuatro primeros instrumentos fueron aplicados a 17 alumnos que habían cursado Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Algunas de las observaciones y resultados identificados de esta aplicación piloto se describen brevemente enseguida.

Primer instrumento

- Algunos alumnos requieren el uso de un formulario de derivación e integración para obtener algunas derivadas e integrales.
- Las funciones polinomiales permiten un trabajo operatorio fácil en otros alumnos, al igual que la simbología involucrada no parece significar un obstáculo.
- Los participantes pueden calcular $\int_1^x (6x)\,dx$, pero desconocen su significado.
- La relación bidireccional entre la derivada y la integral parece estar ausente en el sistema de creencias de los participantes.
- Tiene potencial para identificar diversas conexiones matemáticas en el registro algebraico que depende únicamente del sistema de creencias de los estudiantes.

Segundo instrumento

- Los estudiantes consideran indispensable la representación algebraica asociada a las gráficas; cuando no se presentan no resuelven la actividad propuesta.
- Algunos de los participantes reconocen el grado de la función representada en la gráfica, sin embargo, encuentran difícil hallar su representación algebraica. No conciben a la gráfica dada como procedimiento para esbozar la que se les pide.
- Una limitante que declaran los alumnos reside en sus nulos conocimientos sobre derivadas e integrales, pese a haber cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral
- Los participantes manifiestan mayores dificultades en gráficas de grado 4 y 5, mientras que parecen tener menos problemas con las de grado 2 y 3.
- Se requirió mayor tiempo para que los alumnos completaran las tareas propuestas por este instrumento en comparación con los demás.

Tercer instrumento

- Las producciones de los estudiantes indican ausencia de conocimientos sobre conceptos de: costo total, costo marginal, costo fijo, rapidez de crecimiento y la derivada en un punto.
- Conciben a los problemas totalmente desconectados unos de otros.
- En los problemas de física suelen recurrir a fórmulas aprendidas durante su educación básica.

- El conocimiento de los estudiantes sobre los conceptos que evocan los problemas es necesario para que resuelvan las actividades propuestas. De hecho, ellos piden que se les definan los conceptos que desconocen para buscar posibles soluciones de cada problema.

Cuarto instrumento

- Los estudiantes consideran fundamental tener las representaciones algebraicas asociadas a los fenómenos modelados gráficamente para resolver las situaciones planteadas. Para ello requieren de conocimientos previos, pero se ven limitados por su desconocimiento de algunos conceptos propios de cada disciplina que consideró el instrumento.
- El comportamiento gráfico crea confusiones en los participantes respecto del gado de la función asociada a ellos.
- La principal limitante de los estudiantes es su escaso dominio para conectar las matemáticas con otras disciplinas, algunos refieren no saber cómo se hace o porque desconocen el significado de cierto término, por ejemplo, costo marginal.

Por su parte, la aplicación piloto del quinto instrumento se hizo con un profesor de matemáticas en servicio de bachillerato, un maestro en matemática educativa y dos estudiantes de doctorado de matemática educativa. El objetivo fue identificar la potencialidad del instrumento para explorar las conexiones matemáticas, a la par que obtener sugerencia de los participantes sobre cómo mejorar el instrumento. Cuando respondieron los cuestionarios se les plantearon preguntas como: ¿cómo cree que responderían los alumnos? ¿Cómo podrían ser planteadas las preguntas para que sean entendibles para los estudiantes? ¿Cuáles cree que podrían ser las respuestas de los estudiantes? ¿Qué sugiere para mejorar el instrumento? Las respuestas a las preguntas anteriores, así como las mismas producciones escritas de los profesores permitieron plantear las siguientes observaciones.

Quinto instrumento

- Los profesores sugirieron que los estudiantes participantes en el estudio deberían ser aquellos quienes recién hayan cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral.

- Dado que el instrumento fue de opciones múltiples en su mayor parte, si bien ayuda a identificar ciertas conexiones matemáticas, esta modalidad también parece inducir a los participantes a respuestas esperadas por el investigador y no favorece que la persona evidencie su forma natural de responder a las actividades propuestas.
- Las actividades de falso o verdadero (otra parte del instrumento), tampoco tienen potencial para identificar todo tipo de conexiones matemáticas, sino que en el mejor de los casos emergen las esperadas.
- En definitiva, este instrumento no tiene potencial para identificar las conexiones que los estudiantes establecen de forma natural cuando resuelven una actividad matemática.

Finalmente, si bien los cinco instrumentos tienen diferente potencialidad para explorar conexiones matemáticas cuando los estudiantes resuelven tareas que involucran a la derivada y a la integral, también la tienen para identificar concepciones alternativas. Por ello, se consideró que un mismo instrumento posibilitaría al mismo tiempo identificar conexiones matemáticas y concepciones alternativas.

3.3 Método de investigación

El diseño de los primeros instrumentos, las evidencias colectadas después de una aplicación piloto de cada uno de ellos, así como la modalidad en que se aplicaron, es decir, en forma de entrevista o en forma de cuestionarios ofrecieron las pautas para elegir el método que mejor se adaptara a los propósitos de la presente investigación. Esto llevó a tomar la decisión de utilizar a las Entrevistas Basadas en Tareas (Task-Based Interviews, por su nombre en inglés) como método para colectar los datos porque conjuga el uso de dos técnicas: aplicación de cuestionarios (con tareas específicas) y entrevistas. Esto permite recabar datos tanto de las producciones escritas de los participantes, así como los argumentos verbales y gestuales que utilizan. Este método ayuda a obtener una riqueza de datos que, a su vez, permite identificar tanto las conexiones matemáticas utilizadas por los estudiantes, así como sus concepciones alternativas al resolver tareas específicas.

En las Entrevistas Basadas en Tareas hay una interacción entre un sujeto (el solucionador del problema) y un entrevistador en relación con una o más tareas (preguntas, problemas o actividades) regulado por un sistema de normas explicitas e implícitas (Goldin, 2000; Koichu & Harel, 2007). Al analizar el comportamiento verbal y no verbal o bien interacciones suscitadas, el investigador puede hacer inferencias acerca del pensamiento matemático, aprendizaje y/o resolución de problemas del sujeto (Goldin, 2000).

Para Assad (2015), las Entrevistas Basadas en Tareas proporcionan oportunidades para evaluar el conocimiento conceptual de los estudiantes, pero también para extender esa comprensión animando a los estudiantes a examinar sus propias estrategias y su propio pensamiento matemático. Según Assad, el protocolo de la entrevista puede estar estructurado con indicaciones y las respuestas previstas de antemano por el entrevistador, o puede ser semi-estructurada, lo que permite que el entrevistador juzgue la respuesta adecuada al razonamiento matemático de los estudiantes. A través de las preguntas, el entrevistador puede motivar a los estudiantes a autocorregirse cuando cometen errores o para ampliar o generalizar un problema (Assad, 2015).

Otra ventaja de las entrevistas basadas en tareas, es que permite a los investigadores observar, registrar, e interpretar comportamientos complejos y patrones en el comportamiento, incluyendo las palabras dichas por los sujetos, movimientos, escritura, dibujos, acciones en y con materiales externos, gestos, expresiones faciales, etc. (Goldin, 2000). Las decisiones respecto a qué observar son parte del diseño de la investigación. Para los propósitos de esta investigación se observaron tanto las producciones escritas de los estudiantes como las orales (argumentos) y gestuales que los estudiantes hacen en sus intentos por resolver las tareas propuestas.

Goldin (2000) establece diez principios para la construcción y diseño de las Entrevistas Basadas en Tareas. Entre estos se encuentran: elegir tareas asequibles a los sujetos que incorporen estructuras representacionales ricas, fomentar la libre resolución de problemas, decidir qué podría ser grabado y grabar tanto como sea posible, preparar entrevistas clínicas y test piloto, así como prever nuevas posibilidades o imprevistos. Estos puntos fueron considerados en el diseño que consideró la presente investigación.

3.3.1 Diseño de Entrevistas Basadas en Tareas

Con base en las observaciones hechas después de la aplicación piloto de los cuatro instrumentos previamente diseñados, se optó por conjuntar todo en un solo instrumento que recopilara las producciones de los estudiantes en los registros algebraicos, gráficos y del lenguaje escrito (problemas de aplicación). En ese sentido se elaboró un protocolo semiestructurado para la entrevista que fue utilizado por el entrevistador que planteó las tareas propuestas a los estudiantes y algunas preguntas auxiliares para cada una. Por otra parte, a los estudiantes se les proporcionó el mismo protocolo en forma de cuestionario con las tareas propuestas, pero sin las preguntas auxiliares (ver anexo 1). El protocolo de la entrevista se estructuró en cuatro partes (Tabla 2).

Tabla 2. Estructura del protocolo utilizado.

PARTE 1. *Datos generales del entrevistado.* Su objetivo fue recopilar información personal de los participantes, así como el desempeño que tuvieron en Cálculo Diferencial y en Cálculo Integral. Las preguntas planteadas fueron:

1. ¿Cuál es tu nombre completo y cuál es tu edad?
2. ¿En qué semestre estás actualmente?
3. ¿Qué calificaciones has obtenido en tus cursos de Cálculo?
4. ¿Cómo consideras que fue tu desempeño en las clases de Cálculo?

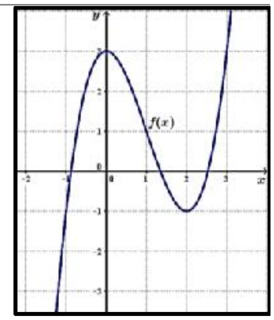
PARTE 2. *Explorando conexiones matemáticas y concepciones alternativas en el registro algebraico*. Su objetivo fue identificar las conexiones matemáticas y concepciones alternativas que aparecen cuando los estudiantes resuelven las tareas en el registro algebraico. Estas son las que con mayor frecuencia se presentan en los libros de texto y las que se abordan en clases. Se integró de nueve actividades. En la primera se plantean preguntas relacionadas con el concepto de función, concepción previa a la derivada y a la integral. Las actividades 2 a la 4 corresponden a la derivada, mientras que de la 5 a la 7 a la integral. En estas se explora tanto las conexiones matemáticas como las concepciones alternativas que emergen para ambos conceptos (derivada e integral), así como las asociadas a la derivada puntual, a la integral indefinida y definida, así como el significado de cada resultado encontrado. Finalmente, las actividades 8 y 9 exploran la conexión matemática de reversibilidad entre la derivada y la integral a través del uso del TFC o bien, las concepciones alternativas que emergen en tareas relacionadas con el TFC.

Si te presento la expresión $f(x) = 3x^2$.

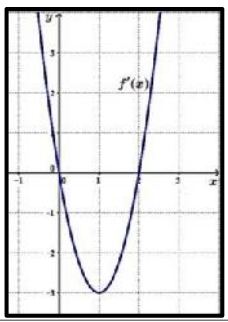
1. ¿Qué representa $f(x)$ y cuáles son sus elementos?
2. ¿Qué es la derivada?
3. Obtén la derivada de $f(x)$.
   - Si el estudiante no justifica su procedimiento indicarle que lo haga.
   - Si el estudiante conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.
4. Calcula la derivada en x =1 ¿Qué significa ese resultado?
5. ¿Qué es la integral?
6. Integra la función que obtuviste al derivar $f(x)$.
   - Si el estudiante no justifica su procedimiento indicarle que lo haga.
   - Si el estudiante conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.
7. Ahora obtén $\int_1^x 6x\, dx$ ¿qué significa el resultado?
8. Obtén:
   $$\frac{d}{dx}\left[\int 3x^2\, dx\right] =$$
   - Si el estudiante no justifica su procedimiento indicarle que lo haga.
   - Si el estudiante conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.
9. Obtén
   $$\int \left[\frac{d}{dx}(3x^2)\right] dx =$$
   - Si el estudiante no justifica su procedimiento indicarle que lo haga.
   - Si el estudiante conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.

PARTE II. *Explorando conexiones matemáticas y concepciones alternativas en el registro gráfico.* se plantearon dos actividades para identificar que conexiones matemáticas establecen los estudiantes cuando construyen una gráfica de derivada y una de la integral, o bien las concepciones alternativas que aparecen en ese tipo de tareas. Para ello, en la primera se proporcionó la gráfica de una función polinomial $\boldsymbol{f(x)}$ de grado 3 y se pidió construir la gráfica de su derivada; mientras que, en la segunda, se proporcionó la gráfica de la función derivada $\boldsymbol{f'(x)}$ de grado 2 y se pidió esbozar la gráfica de su antiderivada $\boldsymbol{f(x)}$. En cada caso, se consideró en el protocolo proporcionar la representación algebraica asociada a las gráficas si es que los estudiantes no la podían deducir.

1. Dada la siguiente gráfica $f(x)$, traza en el mismo plano cartesiano la gráfica de su derivada $f'(x)$.
   - *Si el estudiante no puede construir la gráfica sin conocer la representación algebraica de $f(x)$ y tampoco puede deducirla, entonces proporcionarle la representación algebraica que es:*
     $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$
   - *Si el estudiante no justifica su procedimiento indicarle que lo haga.*
   - *Si el estudiante conoce más de una vía de solución motivarlo a que la presente.*



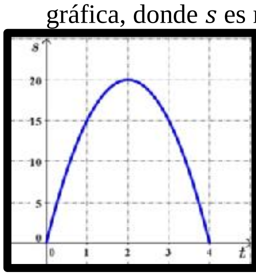
2. Dada la siguiente gráfica $f'(x)$, traza en el mismo plano cartesiano la gráfica de su antiderivada.



   - *Si el estudiante no puede construir la gráfica sin conocer la representación algebraica de $f'(x)$ y tampoco puede deducirla, entonces proporcionarle la representación algebraica que es*:
     $$f(x) = 3x^2 - 6x$$
   - *Si el estudiante no justifica su procedimiento indicarle que lo haga.*
   - *Si el estudiante conoce más de una vía de solución motivarlo a que la presente.*

PARTE III. *Explorando conexiones matemáticas y concepciones alternativas en la resolución de problemas de aplicación*. El objetivo fue identificar las conexiones extramatemáticas que los estudiantes establecen cuando resuelven problemas que evocan conceptos de biología y de física, así como aquellas concepciones alternativas que aparecen en los intentos que realizan para resolver los problemas propuestos. Para ello, se plantearon dos problemas inversos de cada tipo con el fin de que los estudiantes usaran la derivada y la integral, al mismo tiempo que se explora si son capaces de identificar la reversibilidad entre los conceptos derivada e integral y problemas planteados. En el caso donde el fenómeno se modeló gráficamente, se consideró necesario proporcionar a los estudiantes la representación algebraica asociada a esas gráficas si es que no podían deducirla.

1. La posición de una piedra lanzada verticalmente está representada en la siguiente gráfica, donde s es medida en metros y t, el tiempo, en segundos.

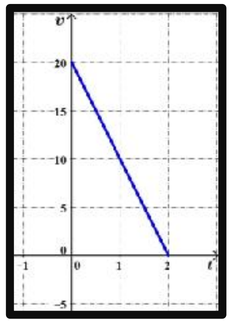


   ¿Cómo calcular la velocidad de la piedra en cualquier segundo?

   ¿Cuál es la velocidad de la piedra cuando han transcurrido 2 segundos, es decir en t = 2?
   - *Si el estudiante no puede deducir la representación algebraica asociada a la gráfica, indicarle que es*
     $$s(t) = 20t - 5t^2$$
2. La población de cierta especie de animales se calcula mediante la expresión
   $$p(t) = 32 - t^2 + 100$$
   Donde *t* (tiempo) está medido en años.
   a. Encuentra una expresión que permita calcular la velocidad de crecimiento de la población para cualquier año.

b. ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población en $t = 2$?

3. La velocidad v de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo está representado en la siguiente gráfica:



a. ¿Cuál es la fórmula de la función que dá la posición que rige a tal movimiento?

b. ¿Cuál es la fórmula de la función posición que rige a tal movimiento si transcurrido un segundo, el cuerpo se encuentra a 4 metros de distancia, es decir, $s(1) = 4$ m?

- *Si el estudiante no puede deducir la representación algebraica asociada a la gráfica indicarle que es*

$$v(t) = 20 - 10t$$

4. Una población de animales está creciendo a una razón de $r(t) = 6t^2 - 2t$ por año.

a. Encuentra la función que describe la población total en determinado tiempo.

b. Si la población inicial es de 100 animales. ¿Cuál es la función que describe la población total?

Visión retrospectiva. Se planteó una última pregunta para que los estudiantes hicieran una visión retrospectiva a partir de las actividades que habían resuelto con el fin de identificar explícitamente si es que ellos reconocen la conexión de reversibilidad entre la derivada y la integral.

1. A partir de las actividades que resolviste o a partir de tus conocimientos previos, tú ¿crees que existe alguna relación entre la derivada y la integral? ¿Cuál?

3.3.2 Contexto de la investigación y participantes

La investigación se desarrolló en una escuela de nivel medio superior ubicada en Chilpancingo, Guerrero, México. Esta escuela tiene una matrícula aproximada de 2000 estudiantes distribuida en los turnos: matutino y vespertino, en los tres grados. Al momento de llevar a cabo esta investigación, el plan de estudio del bachillerato al que pertenecía esta escuela era bajo el enfoque por competencias. Este modelo promueve desarrollar en el aprendizaje del alumno el saber (conocimiento), el saber hacer (aplicación del conocimiento) y el saber ser (conducta, actitudes y valores).

Para llevar a cabo la investigación, primeramente, se contactó a un profesor que impartía clases en la escuela elegida, se le informó del objetivo de la investigación y se le solicitó su apoyo para invitar a sus estudiantes a participar en el proyecto. Se le pidió que los estudiantes hubieran cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral en el semestre que recién había finalizado. A su vez, el profesor invitó a los estudiantes a participar en la investigación. Finalmente, aceptaron participar 25 estudiantes (18 hombres y 7 mujeres), cuyas edades oscilaban entre 17 y 18 años. En adelante para hacer referencia a ellos se utilizarán los acrónimos: E1, E2, E3, …, E25, donde E significa estudiante y el número adjunto a la letra E permite diferenciar entre cada participante.

Las entrevistas se realizaron en cuatro días hábiles del mes de mayo (2016) por el autor de la presente investigación y por un estudiante de doctorado con experiencia previa en hacer entrevistas, que conocía a detalle el objetivo de la investigación. La duración de cada entrevista fue entre 60 y 120 minutos. Toda la entrevista giró en torno al cuestionario proporcionado al estudiante y las preguntas auxiliares del protocolo que se diseñó para ese fin. Mientras los estudiantes resolvían cada tarea propuesta, el investigador hizo preguntas auxiliares con el fin de saber qué motivaba al estudiante a resolver la tarea en la forma en que lo hacía, por qué de esa manera o si él o ella conocía otra vía para hallar la solución, qué significaba el resultado, qué relación podría tener con otros conceptos, etc. Por tanto, el investigador en todo momento estuvo atento a la cada acción del estudiante para hacer preguntas que ayudaran a entender el proceder de éste.

Por otra parte, como lo sugiere el método de Entrevistas Basadas en Tareas durante las entrevistas se motivó a los estudiantes a revisar sus producciones escritas, en particular los cálculos que hicieron para asegurar que sus errores fueran producto de sus concepciones alternativas y no a un descuido menor (como ignorar algún signo, sumar de manera equivocada, etc.) en el momento de realizar las operaciones.

Una vez que se finalizó con la realización de entrevistas, éstas se organizaron por día de entrevista en carpetas separadas. Se les asignó el identificador correspondiente (E1, E2, E3, …, E25). Cada una fue transcrita en su totalidad para tener la narrativa de los estudiantes que se guardaron también en esas carpetas (E1, E2, E3, …, E25), además sus producciones escritas fueron escaneadas y guardadas en esas mismas carpetas. Por tanto, se reunió evidencia escrita y verbal de cada participante en relación con las actividades propuestas. En cuanto a los gestos utilizados por los estudiantes éstos fueron descritos en las narrativas de cada uno para saber en qué momento fueron utilizadas y qué objeto matemático explicaron utilizando esa vía. Estas evidencias fueron objeto de análisis.

3.3.3 Análisis de los datos

Con base en los datos colectado se decidió para su análisis utilizar el análisis temático creado por Braun & Clarke (2006, 2012), cuyo objetivo es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada. Es decir, como Clarke & Braun (2013) señalan es esencialmente un método para identificar y analizar patrones en datos cualitativos. Según Braun y Clarke (2006) "un tema capta algo importante acerca de los datos en relación a la pregunta de investigación y representa cierto nivel de patrón respuesta o significado dentro del conjunto de datos (p. 86)". Los patrones se identifican a través de un proceso riguroso de familiarización de datos, codificación de datos, el desarrollo del tema y revisión.

Entre las ventajas del análisis temático destaca que es un método flexible, es decir, que puede ser utilizado para una amplia gama de marcos teóricos e incluso para diversas preguntas de investigación. También puede ser utilizado para analizar diferentes tipos de datos, es decir, permite el trabajo con grandes o pequeños conjuntos de datos; y finalmente, puede ser aplicado para producir análisis basado en datos (data-driven) o dirigido por la teoría (theory-driven) (Clarke & Braun, 2012). Incluso, Clarke & Braun (2013) añaden que puede usarse para analizar diferentes tipos de datos, desde fuentes secundarias como medio hasta transcripciones de grupos focales o entrevistas.

Para el presente estudio se hizo un doble análisis temático, el primero para identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes establecen al resolver las tareas propuestas y, el segundo, para identificar las concepciones alternativas que aparecen en los intentos de los estudiantes por resolver esas mismas tareas. El método se estructura en seis fases (Braun & Clarke, 2006, 2012), que fueron seguidas en esta investigación como se detalla enseguida:

Fase 1. *Familiarizarse con los datos*

Esta fase implica conocer a detalle las producciones (verbales, escritos y gestuales) de los estudiantes, adentrarse a los datos para familiarizarle con el lenguaje que éstos utilizan y comprender la forma en que éstos razonan. Para esto, se hizo una lectura general de las narrativas de todos los estudiantes en repetidas ocasiones. Mientras se hizo esto se fue tomando notas de algunas observaciones importantes asociadas a las primeras conexiones matemáticas y concepciones alternativas que aparecían en las respuestas de los estudiantes en distintos momentos de la entrevista.

Esta etapa fue importante para valorar la calidad de los datos colectados, así como reconocer de manera general algunas limitaciones del instrumento (que serán discutidas en el capítulo 5 de este trabajo). Sin embargo, esta etapa es más sencilla cuando el investigador es el mismo que realiza las entrevistas como el caso del autor de este trabajo, pero en aquellas entrevistas donde colaboró otro investigador fue necesario leer y releer para familiarizarse con esos datos, aunque el lenguaje utilizado por los estudiantes, que guardaron mucha similitud, ayudó a superar esta primera etapa del análisis temático.

Fase 2. *Generar códigos iniciales*

De acuerdo a Braun & Clarke (2012) los códigos identifican y proporcionan una etiqueta para una característica de los datos que es potencialmente relevante para la pregunta de investigación y pueden ser descriptivos o interpretativos. La codificación se hace cada vez que se identifica algo que es potencialmente relevante para la pregunta de investigación, asimismo, se puede codificar una parte de los datos con más de un código. En ese mismo sentido, a medida que progresa la codificación, también se pueden modificar los códigos existentes para incorporar nuevo material, es decir, es válido hacer una recodificación a la luz del progreso que se tenga en este proceso de codificación.

Para los propósitos de la presente investigación, con base a la lectura previa de las narrativas y utilizando la acepción de conexiones matemáticas[2] y de concepciones alternativas[3] adoptadas previamente se hizo una primera codificación que se fue refinando conforme avanzó este proceso y hasta culminar con la codificación de las producciones de los 25 participantes.

En relación con las conexiones matemáticas

Para identificarlas, se buscó en las narrativas frases o palabras donde se infieren algún tipo de conexión matemática que los participantes hicieron. En particular, para superar esta etapa del análisis temático y para lograr la tercera, se hizo haciendo operatoria la acepción que se asumió de conexiones matemáticas. Para ello, se tuvo cuidado de que los estudiantes asociaran o relacionaran dos o más ideas, conceptos, procedimientos, representaciones,

[2] Son un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Las conexiones matemáticas emergen cuando los estudiantes resuelven tareas específicas y pueden ser identificadas en sus producciones escritas o en los argumentos orales o gestuales que desarrollan (García-García & Dolores-Flores, 2017a, p. 3).

[3] Son aquellas concepciones de los estudiantes inconsistentes con lo que la comunidad matemática acepta como correctas y que han sido socialmente compartidas y negociadas dentro de esta comunidad. En otras palabras, se asumieron como las "no-conexiones matemáticas" que los estudiantes realizan al resolver tareas específicas, es decir, forman la otra cara de la moneda cuando se estudian conexiones matemáticas.

teoremas o significados. Asimismo, las siguientes preguntas fueron orientadoras para poder, finalmente, decidir si había o no conexión matemática en las producciones del estudiante (tercera etapa).

- ¿La respuesta del estudiante es una relación correcta entre ideas matemáticas, conceptos, procedimientos, representaciones, teoremas o significados?
- ¿La relación que establece el estudiante es útil para comprender ideas matemáticas más avanzadas?
- ¿El estudiante utiliza diferentes representaciones en la relación o asociación que hace?
- ¿Es una relación de inclusión la que hace el estudiante entre las ideas o conceptos matemáticos?
- ¿Es una relación de generalización la que hace el estudiante entre las ideas o conceptos matemáticos?
- ¿El estudiante planea un modelo matemático (independientemente del que se proporciona en los datos) para resolver los problemas de aplicación?

Las dos primeras preguntas debían ser respondidas afirmativamente para reconocer si el estudiante hacía una conexión matemática, mientras que las demás ayudarían en una etapa posterior para categorizar las conexiones matemáticas identificadas.

Por ejemplo, la tabla 3 presenta algunos extractos y algunos códigos que se establecieron en esta segunda etapa del análisis temático a partir de la narrativa de los estudiantes. Este análisis se complementó con la revisión de la producción escrita de cada estudiante que era consistente con el argumento que ofrecía.

Tabla 3. Codificación de los datos en relación con las Conexiones Matemáticas.

Extracto	Código
Entrevistador: para ti ¿qué es la derivada? E23: ***la derivada es como encontrar, hacer algo más pequeño, más reducido, simplificarlo***, porque ***la integral es hacer algo más grande***. ***La derivada es lo opuesto***, entonces es hacer algo más pequeño.	1. Cuando se derivada una función entonces se obtiene una función simplificada. 2. Cuando se integra una función entonces se obtiene una función más compleja. 3. La derivada es una operación opuesta a la integral.
Entrevistador: Aquí tú puedes ver la gráfica de una función $\boldsymbol{f(x)}$. ¿Puedes construir en este plano cartesiano (se señala) la gráfica de su derivada? E3: (empieza a escribir $\boldsymbol{f(x) = x^3}$) Entrevistador: ¿me puedes ir indicando lo que vas haciendo?	1. La forma gráfica de una función permite identificar el grado de la misma. 2. La forma de la gráfica de una función permite saber el grado de su derivada y la concavidad de ésta.

E3: ***por la forma en que está la gráfica puedo saber que es una función que es cubica*** y por esa misma forma puedo saber que es positiva (señala la función que escribió). ⋮ Entrevistador: (después de un rato que el estudiante no realiza acción alguna) ¿en qué estás pensando? E3: en cómo calcular primero la primera función [que describe a la gráfica dada] para después derivarla. Entrevistador: pero ¿podrías construir la gráfica de la derivada sin conocer la función [asociada a la gráfica]? E3: mmm… ***sólo sabría que es cuadrática***. Entrevistador: pero ¿podrías saber más detalles de ella? E3: ***que abre hacia arriba*** (es decir, es cóncava hacia arriba).	
Entrevistador: vamos a pasar a la cuarta parte de la entrevista, en esta parte se plantean algunos problemas, necesito que los leas y resuelvas las situaciones planteadas. E7: (lee el problema) Entrevistador: ¿Entiendes la situación en general? E7: Sí, dice que, por ejemplo, una población de cierta especie de animales… [esta] función rige la cantidad [o población total] que hay en *x* cantidad de tiempo, […] pero, yo quiero calcular la velocidad a la que se [re]producen estos animales en ese tiempo de hora o en un minuto, entonces derivé. Se supone que ***la derivada de la posición nos da la velocidad*** y así sucesivamente, ***la derivada de la velocidad nos da la aceleración*** y así. Sí, es 20.	1. La derivada de la posición de un objeto es su velocidad. 2. La derivada de la velocidad de un objeto es su aceleración. Nota: E7 parece usar usas conocimientos de Física para resolver un problema que evoca conceptos biológicos.

De los extractos de la tabla 3 y, en particular, de los enunciados puestos en negrita formamos varios códigos iniciales. En ocasiones, en un mismo extracto se construyó más de un código cuando los datos así lo permitían. Asimismo, en algunos casos se hicieron algunas anotaciones que servirían de apoyo en la última etapa del análisis temático tal como se aprecia en la nota que se hizo para la producción de E7.

En relación con las concepciones alternativas

Para identificar las concepciones alternativas se hizo por separado un segundo análisis de las producciones (verbales, escritas y gestuales) de los participantes. Se buscaron frases o enunciados donde las relaciones que los estudiantes establecieran entre ideas matemáticas, conceptos, procedimientos, representaciones, teoremas o significados fueran inconsistentes desde el punto de vista de las Matemáticas. Por eso motivo, el énfasis se puso principalmente en aquellas respuestas de los estudiantes donde no había evidencia de conexiones matemáticas. La tabla 4 presenta dos ejemplos de los códigos que se formaron a partir de la evidencia disponible:

Tabla 4. Codificación de los datos en relación con las Concepciones Alternativas.

Extracto	Código
Entrevistador: Aquí tú puedes ver una expresión *efe* de equis igual a algo (se le muestra la expresión $\boldsymbol{f(x) = 3x^2}$). Para ti ¿qué representa esa expresión y qué elementos la componen? E6: ***La componen la función***, el signo de igual que me dice que es una igualdad, una incógnita elevada al cuadrado. Entrevistador: ¿Cómo sabes que es función? E6: ***porque tiene la f y entre paréntesis tiene la equis***. Entrevistador: y ¿si no tuviera efe, si tuviera otra expresión sería función de todos modos? E6: si tuviera otra letra como una *g* o una *h* sí, sí sería función. Entrevistador: y si en lugar de efe de equis tuviera nada más $\boldsymbol{y}$ igual a tres equis cuadradas ¿Sería una función? E6: *sería una ecuación de segundo grado*.	1. Una expresión de la forma $f(x)$, por sí misma significa función. Nota: si $f(x)$ se sustituye por y el estudiante cree que la nueva expresión sería una ecuación cuadrática.

Fase 3. *Buscar temas*

Braun y Clarke (2012) señalan que buscar temas es un proceso activo, es decir, generar o construir temas en lugar de *descubrirlos*. En ese sentido, refieren que el conjunto de datos colectados proporciona la base material para el análisis y limita el producto final posible, pero se pueden crear muchas variaciones diferentes al analizar los datos. Así, esta fase del análisis temático consiste en revisar los datos codificados para identificar áreas de similitud y superposición entre los códigos; este proceso de generación de temas y subtemas, implica el agrupamiento de códigos que parecen compartir algún rasgo unificador para reflejar y describir un patrón coherente y significativo en los datos. En esta fase se empieza a explorar la relación que guardan los temas (y subtemas) proporcionando una imagen significativa; un tema central puede relacionarme con otros para tener la totalidad de esos temas relacionados o bien, con la mayor parte de ellos (Braun & Clarke, 2012). Juntos ofrecen una historia global en relación a la pregunta de investigación.

Para los propósitos de esta investigación se observaron códigos asociadas a conceptos matemáticos bien definidos como función, derivada, derivada puntual, diferencial, integral, integral definida, constante de integración, gráficas de funciones polinomiales y, por la naturaleza del protocolo, a conceptos físicos y biológicos. Como convención se adoptó que cada tema y subtema era una conexión matemática (o concepción alternativa, según el caso) organizadas en torno a los conceptos anteriores.

En esta etapa del análisis temático se agruparon los códigos creados y modificados en la etapa previa para comprender sus relaciones y establecer familia de códigos (temas potenciales). Los extractos asociados a cada uno de ellos fueron contrastamos para formar temas. Esto permitió agrupar en temas y subtemas los patrones respuestas de los estudiantes asociados a conexiones matemáticas específicas (o concepciones alternativas, según el caso). Por ejemplo, los códigos registrados en la tabla 3 y 4 se transformaron en temas indicados en la tabla 5.

Tabla 5. Temas y subtemas formados a partir de los códigos.

En relación a las…	Código	Tema o subtemas
Conexiones Matemáticas	1. Cuando se derivada una función entonces se obtiene una función simplificada. 2. Cuando se integra una función entonces se obtiene una función más compleja. 3. La derivada es una operación opuesta a la integral.	1. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad. 2. La integral de una función polinomial es aumentar su grado en uno. 3. La derivada y la integral son operaciones inversas.
	1. La forma gráfica de una función permite identificar el grado de la misma. 2. La forma de la gráfica de una función permite saber el grado de su derivada y la concavidad de ésta.	1. La *forma* de una representación gráfica asociada a una función polinomial permite identificar el grado de esta.
	1. La derivada de la posición de un objeto es su velocidad. 2. La derivada de la velocidad de un objeto es su aceleración.	1. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad. 2. La derivada de la función velocidad de un objeto es su aceleración.
Concepciones alternativas	1. Una expresión de la forma $f(x)$, por sí misma significa función.	1. En $f(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función.

Fase 4. *Revisión de los temas*

Este proceso involucra un proceso recursivo mediante el cual el desarrollo de los temas es revisado en relación con los datos codificados y todo el conjunto de datos (Braun & Clarke, 2012). Para ello, se revisan los temas frente a los extractos asociados a cada uno a fin de que exista relación entre ellos. Asimismo, se pueden formar nuevos temas que capture de forma más significativa los datos relevantes que responden a la pregunta de investigación. En esta etapa se pueden eliminar algunos temas que no agrupen el patrón respuesta de los estudiantes o que no sea suficientemente soportado por la evidencia. De acuerdo a Braun & Clarke (2012) algunas preguntas que pueden guiar este proceso son:

- ¿Es este realmente un tema (dado que podría ser sólo un código)?

- Si se trata de un tema, ¿cuál es su calidad, es decir, dice algo útil sobre el conjunto de datos y la pregunta de investigación?
- ¿Cuáles son los límites de este tema, es decir, que puede incluir y qué excluye?
- ¿Hay suficientes datos (significativos) para apoyar este tema, es decir, el tema es fino o denso?
- ¿Son los datos demasiado diversos y de gran alcance, es decir, el tema de coherencia?

Por tanto, en esta etapa la coherencia entre los temas y los datos será la que determine el refinamiento de los temas (o subtemas, si es el caso). En esta etapa es válido también dividir un tema amplio en un número de temas más específicos o coherentes o bien, juntar aquellos de tal forma que en grupo forman un todo más coherente.

Según Braun & Clarke (2012) una vez que se tenga un conjunto distintivo y coherente de temas que funcionen en relación con los extractos de datos codificados, la siguiente etapa es revisar los temas en relación con el conjunto completo de datos. Esto implica una relectura final de todos los datos para determinar si las temas (y subtemas) capturan significativamente el conjunto de datos. El fin último es que el conjunto de temas (y subtemas) formados capturen los elementos más importantes y relevantes de los datos, y los datos en general, en relación con la pregunta de investigación. Finalmente, la revisión en esta etapa podría implicar la creación de temas adicionales, modificar o descartar los temas existentes.

Para los propósitos de la presente investigación la revisión se hizo atendiendo lo descrito previamente, es decir, primero se revisaron los temas en relación con los códigos y extractos asociados a cada uno y, en relación con el conjunto total de datos y con las preguntas de investigación que se plantearon al principio. En esta etapa, los temas y subtemas (conexiones matemáticas o concepciones alternativas, según el caso) fueron discutidos en repetidas sesiones de trabajo con profesionales de la Matemática Educativa con experiencia previa en la investigación. Algunos temas sufrieron modificaciones, se crearon nuevos, otros se eliminaron porque no reunían con suficiente fuerza el patrón respuesta de los estudiantes y, finalmente, se agruparon los temas y subtemas en torno a los conceptos matemáticos al que estaban asociados.

Por ejemplo, algunos temas descritos anteriormente (tabla 5) fueron modificados en la forma como están indicados en la tabla 6:

Tabla 6. Modificando temas y subtemas en la cuarta etapa del Análisis Temático.

En relación a las…	Temas	Temas modificados	Asociado a…
Conexiones Matemáticas	1. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad. 2. La integral de una función polinomial es aumentar su grado en uno.	1. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.	La derivada y la integral
	1. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad. 2. La derivada de la función velocidad de un objeto es su aceleración.	La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración.	Conceptos biológicos
Concepciones alternativas	1. En $f(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función.	En $f(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función.	Concepto función

En la tabla 6 se aprecia que los temas se agruparon en uno sólo en cada caso para captar con mayor fuerza la respuesta de los estudiantes y que responden con mayor precisión a las preguntas de investigación planteadas. Sin embargo, otros temas no sufrieron modificación alguna tal como se observa en el caso de la concepción alternativa descrita. Es pertinente aclarar que si bien los temas “la derivada de la función posición de un objeto es su velocidad” y “la derivada de la función velocidad de un objeto es su aceleración” se construyeron en un primer momento con la respuesta que ofreció E7 a un problema que evocaba conceptos biológicos, sin embargo, finalmente se transformó en el tema “la derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración” se agrupó en torno a los conceptos físicos por dos razones: primero, la fuente de esos temas corresponden a la conexión de la Física con el Cálculo como lo manifestó E7 (y otros estudiantes que hicieron la misma conexión matemática) y segundo, porque respuestas similares se obtienen cuando E7 resuelve los problemas de física que evocan los mismos conceptos (posición y velocidad).

Por otra parte, a partir de esta etapa se encontraron las primeras relaciones entre las conexiones matemáticas identificadas; sin embargo, fueron fortalecidas en la siguiente etapa del análisis temático. Esto fue importante para responder a la segunda pregunta de investigación que planteó este estudio.

Fase 5. *Definición y nombre de los temas*

Al definir los temas, según Braun & Clarke (2012) es necesario establecer claramente lo que es único y específico sobre cada tema; asimismo, un buen análisis temático tendrá temas que (a) no sean demasiados, ya que deberían idealmente tener un enfoque singular; (b) están relacionados, pero sin superponerse, por lo que no son repetitivos, aunque pueden basarse en temas anteriores; y (c) responder directamente a la pregunta de investigación. En algunos casos, es posible tener subtemas dentro de un tema (Braun & Clarke (2012) que son útiles en casos en los que hay uno o dos patrones generales dentro de los datos en relación con la pregunta(s) de investigación, pero cada uno se reproduce de diferentes maneras. Esta fase del análisis consiste en seleccionar extractos para presentar, analizar y luego exponer la historia de cada tema con o alrededor de estos extractos.

Para los propósitos de la presente investigación en sesiones de trabajo se hizo la discusión respecto de cada tema y subtema (iniciado desde la etapa 5). Se definieron los temas y subtemas que englobaron las ideas principales de los estudiantes y que responden a las preguntas de investigación. Asimismo, se hizo la descripción de cada tema y subtema, asociando a cada uno de ellos extractos representativos del conjunto de datos colectados. Por ejemplo, los temas construidos en la fase 5 del análisis fueron definidos como se indica en la tabla 7.

Tabla 7. Ejemplo de definición y nombre de temas construidos.

Conexiones matemáticas o concepciones alternativas	Descripción	Extractos
1. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.	Esta conexión matemática distinguen una característica de la derivada y de la integral de una función polinomial asociado al aumento o disminución de su exponente (grado) según la operación que se debe efectuar.	Entrevistador: ¿Qué relación encuentras entre la derivada y la integral? E21: que son contrarias, son operaciones contrarias Entrevistador: ¿en qué sentido dices que son contrarias? E21: […] es como si le sumaras en uno [a la integral] y en otro [a la derivada] le restas.
En $\boldsymbol{f(x) = 3x^2}$, $\boldsymbol{f(x)}$ por sí sola significa función.	Esta concepción alternativa indica que la letra “f” acompañada de una “*x*” entre paréntesis significa función. La letra f tomada de la palabra *función* genera en ellos esa idea, pero es	Entrevistador: Aquí tú puedes ver una expresión $f(x)$ (se le señala la expresión $f(x) = 3x^2$). ¿Para ti qué representa esa expresión y qué elementos la componen? E6: la componen la función, el signo de igual que me dice que es una igualdad, una incógnita elevada al cuadrado.

	posibilitada porque los estudiantes relacionan sus conocimientos de Álgebra para darle sentido a las literales presentes en la representación algebraica propuesta al estudiante.	Entrevistador: ¿Cómo sabes que es función? E6: porque tiene la f y entre paréntesis tiene la x. Entrevistador: si en lugar de $f(x)$ tuviera nada más y igual a tres equis cuadradas $(y = 3x^2)$ ¿Sería una función? E6: sería una ecuación de segundo grado.

En esta fase del análisis de revisó con mayor énfasis la relación existente entre las conexiones matemáticas para formar los sistemas que se describen en el siguiente capítulo. En García-García & Dolores-Flores (2017a) se reportaron los primeros esfuerzos en ese sentido; sin embargo, en este documento se redefinieron las relaciones a partir de la discusión reiterada sobre estas relaciones en sesiones de trabajo.

Fase 6. *Elaboración del informe*

De acuerdo a Braun y Clarke (2006) esta fase del análisis temático comienza cuando hay un conjunto de temas completamente definidos e implica el análisis final y la redacción del informe. Asimismo, sugieren que el lenguaje y los conceptos utilizados en el informe sean consistentes; el argumento esgrimido debe estar en relación con la pregunta de investigación, es decir, debe respuestas.

Para los propósitos de la presente investigación el reporte (presentado en el siguiente capítulo) tiene la siguiente estructura:

- En una tabla se presentan de manera general como temas y subtemas a las conexiones matemáticas identificadas.
- Posteriormente, se describe cada una de ellas con algunos extractos ilustrativos de la conexión matemática correspondiente.
- Se presenta el sistema de conexiones matemáticas que se forma en relación con el TFC.
- A partir de las características en común que presentan las conexiones matemáticas se hace una categorización de ellas. Es decir, se presenta un modelo para categorizar conexiones matemáticas en Cálculo.
- Finalmente, se describen las concepciones alternativas identificadas en los datos.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Resultados P1: conexiones matemáticas identificadas

Mediante el análisis temático se identificaron 33 conexiones matemáticas que los estudiantes hacen explícita o implícitamente, para un total de 347 conexiones matemáticas (Tabla 8). Estas aparecieron cuando los estudiantes resolvieron las tareas algebraicas, gráficas y problemas de aplicación, es decir, al calcular derivadas o integrales específicas, al graficar una función derivada o antiderivada o al resolver problemas de aplicación que evocaron conceptos físicos o biológicos. Las conexiones matemáticas identificadas se asocian a conceptos como: derivada o integral, al Teorema Fundamental del Cálculo, al comportamiento gráfico y, a los conceptos biológicos o físicos.

Tabla 8. Conexiones matemáticas identificadas en las producciones de los estudiantes.

Grupo	Conexión matemática	Frecuencia
Derivada o integral	1. La derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$.	25
	2. La integral de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ es $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.	24
	3. La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva.	11

		3.1 $f'(a)$ significa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$.	2
	4. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.		11
	5. La integral está asociada con el área bajo una curva.		15
		5.1 La integral definida significa área bajo la curva.	10
		5.2 El resultado de una integral definida significa área.	7
		5.3 La integral es la suma de las áreas de los rectángulos inscritos bajo la curva.	3
	6. Una integral definida tiene límites de integración.		9
		6.1 Los límites de integración significan el intervalo donde se debe calcular el área bajo la curva.	3
	7. La constante de integración C …	7.1 significa una familia de primitivas desplazadas verticalmente en el eje de las ordenadas.	10
		7.2 siempre acompaña al resultado de una integral indefinida	4
	8. El diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función.		4
TFC	9. La derivada y la integral son operaciones inversas.		22
		9.1. La derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función.	15
		9.2. La integral de la derivada de una función polinomial es la misma función.	12
	10. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada.		16
Representaciones gráficas de funciones derivadas o antiderivadas	11. La representación gráfica…	13.1 de una función cuadrática o de segundo grado es una parábola.	14
		13.2 de una función lineal o de primer grado es una línea recta	10
		13.3 del término independiente de una función es el valor donde corta al eje de las ordenadas.	5
		13.4 de una función polinomial puede prolongarse en ambos extremos.	4
		13.5 de una función cúbica o de tercer grado es como una “S” acostada (o).	3
	12. La *forma* de una representación gráfica asociada a una función polinomial permite identificar el grado de esta.		8
Conceptos biológicos	13. Calcular la velocidad de crecimiento de una especie significa encontrar la derivada de la representación algebraica asociada a la población total.		14

	14. La integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total.	12
	15. En $\int r(t)dt = p(t) + C$ la constante de integración C significa población inicial de animales.	11
	16. El resultado de $p'(2) = 20$ significa que justo en el segundo año la población aumentó 20 especies.	7
Conceptos físicos	17. La integral de la función aceleración de un objeto es su velocidad y la integral de la función velocidad es su posición.	15
	18. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración.	14
	19. La velocidad de un objeto en su altura máxima es cero.	13
	20. Encontrar una función primitiva de la posición de un objeto, dada una posición inicial, implica primero calcular una integral y segundo, resolver una ecuación lineal.	8
	21. El resultado de $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en $t = a$.	6
	Total	347

Las conexiones matemáticas de la tabla 8 serán explicadas ampliamente enseguida, aportando en cada caso, evidencia que las sustenten y permitan una mejor comprensión acerca de la naturaleza de esas conexiones matemáticas.

4.1.1 Conexiones matemáticas asociadas a la derivada o a la integral

En este grupo se identificaron 8 conexiones matemáticas asociadas a uno de los dos conceptos centrales del Cálculo, la derivada o la integral; 6 de los cuales tienen subtemas asociadas a conexiones matemáticas específicas.

1. La derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$

Esta conexión matemática que implica el uso de la fórmula $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ para resolver las tareas propuestas se identifica cuando los estudiantes calculan la derivada de funciones polinomiales al trabajar con las tareas algebraicas (ver extracto de la entrevista a E2 y Figura 5, con una frecuencia de 23), cuando grafican la función derivada (con una frecuencia de 25) o bien, al resolver problemas de aplicación que requieren el cálculo de una derivada (con una frecuencia de 20). Esto indica que la conexión se establece con una frecuencia diferente según el tipo de tarea que los estudiantes estén resolviendo, pero fue utilizada por los 25 estudiantes en distintos momentos en al menos un tipo de tarea propuesta.

Entrevistador: ¿Puedes calcular la derivada de esta expresión? (se le señala la función $f(x) = 3x^2$).

E2: Sí (el alumno escribe el resultado).

Entrevistador: me puedes explicar ¿cómo obtienes el resultado?

E2: es que existe una regla, que no sé si tenga nombre o no, pero indica que cuando tenemos algo así (encierra la expresión $3x^2$), el exponente pasaba a multiplicar al coeficiente; y, por ejemplo, aquí sería dos por tres daría seis (escribe el número). Quedaría la *x* y al exponente se le va a restar uno (escribe junto al 6, la expresión x^{2-1}), entonces nos queda seis equis a la uno, pero no es necesario ponerlo (el uno).

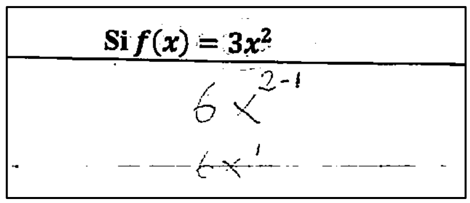


Figura 5. Producción escrita de E2.

En las tareas gráficas, la fórmula $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ fue utilizada por los 25 participantes para graficar la función derivada de la gráfica dada asociada a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Esto significa que los 25 participantes completaron la tarea una vez que contaron con la representación algebraica de la gráfica dada, ya que ninguno de ellos la pudo deducir. Sin embargo, una vez que se le proporcionó la representación algebraica asociada a la gráfica dada, inmediatamente la derivaron utilizando la fórmula mencionada (Figura 6).

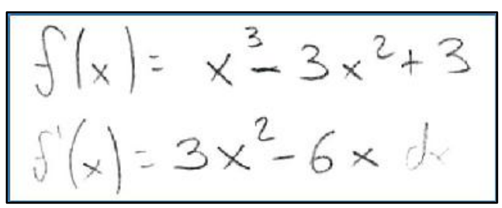
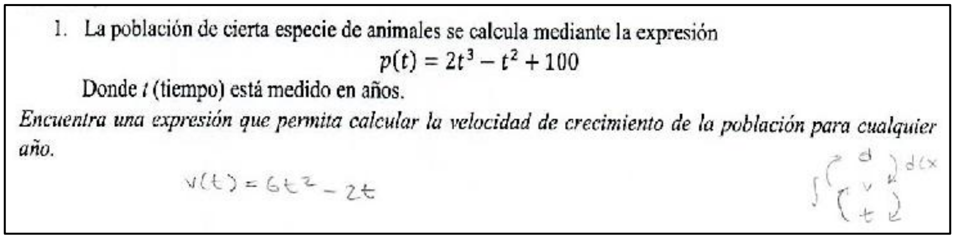


Figura 6. Producción de E2 como paso previo para construir la gráfica de $f'(x)$.

Finalmente, en la resolución de problemas de aplicación la conexión se vio favorecida porque dos de los problemas propuestos se resolvían haciendo uso de la fórmula $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$. Quienes identificaron esto, inmediatamente calcularon la derivada de la función dada en términos algebraicos que modelaba los fenómenos en los problemas propuestos (Figura 7).



1. La población de cierta especie de animales se calcula mediante la expresión
$$p(t) = 2t^3 - t^2 + 100$$
Donde t (tiempo) está medido en años.

Encuentra una expresión que permita calcular la velocidad de crecimiento de la población para cualquier año.

$v(t) = 6t^2 - 2t$

Figura 7. Cálculo de la derivada efectuada por E8.

2. La integral de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ *es* $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Considerando las producciones de los estudiantes de manera general, apareció con una frecuencia de 24. Similar a la conexión matemática previa, ésta se identifica en los tres tipos de tareas propuestas a los estudiantes. Por ejemplo, en la primera parte emerge cuando los estudiantes calculan la integral de $f'(x) = 6x$, es decir, la función cuya derivada ya habían calculado. En ese caso, consideraron importante recurrir a la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ aprendida en el curso de Cálculo Integral para integrar funciones polinomiales (ver extracto de la entrevista a E8 y Figura 8). En esta tarea apareció con una frecuencia de 20.

> Entrevistador: ¿Puedes encontrar la integral de la derivada que obtuviste anteriormente? (se le señala la función derivada $f'(x) = 6x$).
>
> E8: [Hace el cálculo correspondiente].
>
> Entrevistador: ¿Podrías explicarme qué hiciste para hallar la solución?
>
> E8: para empezar, le agregué el diferencial. Después, este seis [señala el 6 de 6*x*] lo podemos sacar [del símbolo de integral] como coeficiente que es, después se aplica una regla que es cuando equis está elevada a cierta potencia para integrarlo se le suma la unidad al exponente que tiene [la variable]. En este caso, es uno más uno y resulta *x* cuadrada y, de ahí es dividido entre el mismo exponente que es uno más uno. Por eso resultó *x* cuadrada sobre dos, pero como teníamos el seis, se multiplica y en este caso seis sobre dos es tres; [se le agrega] *x* cuadrada y se le agrega la constante de integración.

$$\int 6x\,dx = 6\int x\,dx = 6\frac{x^2}{2} = 3x^2 + C$$

Figura 8. Uso de la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por E8.

En el segundo grupo de tareas emergió cuando los estudiantes graficaron la función antiderivada de $f'(x) = 3x^2 - 6x$. El uso de la fórmula se manifestó porque los estudiantes pidieron explícitamente la representación algebraica asociada a la gráfica de la función derivada dada y para la cual se les pidió esbozar la gráfica de su antiderivada. Una vez que se les proporcionó la representación algebraica de la gráfica dada como tarea, ellos, como primer paso, integran la función derivada (Figura 9). En este tipo de tareas la conexión matemática se manifestó con una frecuencia de 20.

$$\int (3x^2 - 6x)\,dx = 3\int x^2 dx - 6\int x\,dx$$
$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 6\,\frac{x^2}{2} + C = x^3 - 3x^2 + C$$

Figura 9. Uso de la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por E8 para hallar la función antiderivada.

Finalmente, la conexión matemática se manifestó en las producciones de 16 estudiantes al resolver dos de los cuatro problemas de aplicación que requerían el uso de la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Se identificó claramente en la producción escrita de los estudiantes (ver Figura 10) cuando el problema pedía calcular la población total (en el problema que evoca conceptos biológicos) o la posición (en el que se evoca conceptos físicos).

3. Una población de animales está creciendo a una razón de $r(t) = 6t^2 - 2t$ por año.
Encuentra la función que describe la población total en determinado tiempo.

$$\int 6t^2 - 2t = \frac{6t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} = 2t^3 - t^2 + C$$

Figure 10. Uso de la fórmula $\int ax^n dx = \frac{anx^{n+1}}{n+1} + C$ por E7.

3. La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva

Esta conexión matemática fue identificada en las producciones verbales de 11 estudiantes que asocian el concepto de derivada con su interpretación gráfica. Este es el significado tradicional que recibe la derivada en situación escolar dado que es la que aparece con frecuencia en los libros de texto, ello justifica en parte que los participantes hayan hecho la citada conexión matemática cuando se les pregunta acerca de la derivada (ver extracto de la entrevista a E4).

Entrevistador: Para ti ¿qué es la derivada?

E4: para mi es la pendiente de una recta [tangente a una curva].

Entrevistador: ¿tendrá otro significado?

E4: tal vez sí. Sólo eso. La pendiente de una recta [tangente] o de una curva.

3.1 $f'(a)$ significa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$

Son 2 los únicos estudiantes que hacen la conexión matemática entre una derivada puntual y su significado gráfico, aunque esto lo expresan verbalmente (ver extracto de la entrevista E24 y Figura 11). Ellos, reconocen que si $f'(x)$ es la derivada de alguna función polinomial, entonces al sustituir en esa función derivada el valor de $x = a$, entonces lo que están encontrando es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en ese valor específico de $x = a$.

Entrevistador: ¿podrías encontrar la derivada en $x = 1$ (para $f(x) = 3x^2$)?

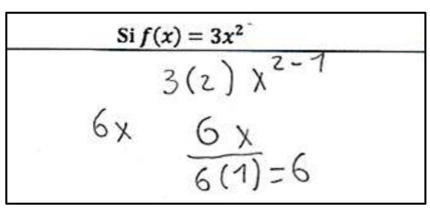
E24: ah, entonces se sustituye nada más aquí (señala la derivada de $f(x)$ que obtuvo previamente) el valor de *x*.

Entrevistador: ok. ¿Qué significa ese resultado?

E24: […] es la pendiente de la línea [recta] tangente.

Entrevistador: Ok. ¿Entonces ese 6 representa la pendiente de la recta tangente?

E24: sí.



Si $f(x) = 3x^2$

$3(2)\,x^{2-1}$

$6x \quad 6x$

$6(1) = 6$

Figura 11. Cálculo de la derivada puntual por E24.

4. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno

Esta conexión matemática apareció en las producciones de 11 estudiantes que distinguen una característica de la derivada y de la integral de una función polinomial asociado al aumento o disminución de su exponente (grado) según la operación que se efectúa. En ese sentido, los estudiantes indican que: *la derivada de una función polinomial es disminuir su grado en uno* y que *la integral de una función polinomial es aumentar su grado en uno.*

Los participantes hacen esta conexión matemática cuando se les pregunta directamente lo que para ellos significa la derivada y la integral. Referente a la característica que le atribuyen a la derivada es posible que sea consecuencia de las creencias asociadas a la derivada de una función polinomial del tipo $f(x) = x^n$, porque creen que si el grado de $f(x)$ es n, entonces el grado de $f'(x)$ es $n - 1$ (ver extracto de E3), es decir, un grado menos que la función original.

Esta conexión matemática es hecha por 11 estudiantes.

Entrevistador: ¿Qué es para ti la derivada?

E3: es como ir degradando una función a un grado menor, por así decirlo.

Entrevistador: ¿tendrá algún otro significado para ti?

E3: es que se puede usar para hacer otras cosas, por ejemplo, en física si se va derivando te puede dar la aceleración.

La respuesta de E3 es consistente con lo que manifiesta al calcular la derivada de la función polinomial $f(x) = 3x^2$, es decir, que $f'(x)$ tiene un grado menor. Por su parte, para la integral los estudiantes asumen que si el grado de $f'(x)$ es n, entonces el grado de su antiderivada $f(x)$ será $n + 1$ (ver extracto de E11).

Entrevistador: para ti ¿qué es la integral?

E11: es la operación contraria de la derivada, en vez de simplificarla [ahora] aumentaba el valor [del exponente] en uno.

5. La integral está asociada con el área bajo una curva

Los 15 estudiantes que hacen esta conexión matemática relacionan el concepto de integral con el área vista como una región delimitada bajo una función $f(x)$ (ver extracto de E9). Es decir, asocian a la integral con su significado gráfico dándole el sentido de área bajo una función específica. Es posible que esta conexión sea producto de la instrucción formal que reciben en el curso de Cálculo Integral, donde entre otras competencias a desarrollar, se plantea que el estudiante “resuelva problemas de áreas mediante la integral definida en cualquier disciplina que tenga relación con su entorno” (DGB, 2013b, p. 23). Ello provocaría que en el sistema de creencias de los estudiantes se incorpore la idea de área al concepto de integral.

> Entrevistador: Para ti ¿Qué es la integral?
>
> E9: Pues integral es el área bajo la curva.
>
> Entrevistador: ¿tendrá otra interpretación para ti?
>
> E9: Con la integral se pueden sacar áreas, eso es para lo que más se ocupa para las áreas.

De esta conexión matemática, se derivan otras conexiones que están asociadas directamente a esta idea primaria.

5.1 La integral definida significa área bajo la curva

Un grupo de 7 estudiantes considera que la integral definida vista como símbolo ($\int_a^b f(x)dx$) significa área (ver extracto E16 y Figura 12). La asociación que realizan en este caso es entre una representación algebraica con un concepto visualizado en el plano gráfico.

> Entrevistador: Enseguida puedes ver indicada una operación ¿qué significa o qué representa? (se le señala la expresión $\int_1^x 6xdx$).
>
> E16: es una integral definida o algo así.
>
> Entrevistador: ¿por qué?
>
> E16: porque es para sacar el área de una gráfica [...] y estos valores (señala ambos límites de integración) se sustituyen en equis.

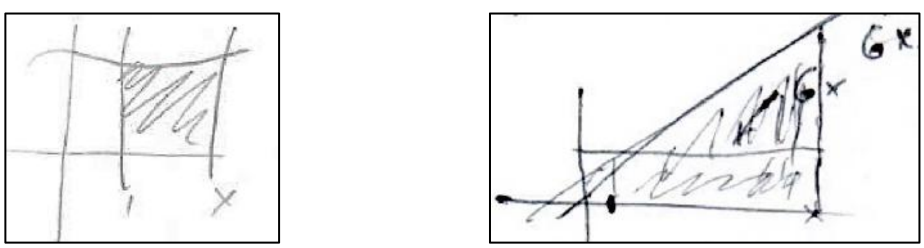


Figura 12. Representación del área bajo la curva hecha por E6 y E7, respectivamente.

En la figura 12 se observa que E7 considera el caso particular de la representación gráfica de $\int_1^x 6xdx$ asociado a la tarea propuesta, mientras que E6 considera una representación más general asociada a $\int_1^x f(x)dx$ donde $f(x)$ es una función algebraica.

Esta conexión matemática es identificada en la producción de los estudiantes porque entre las actividades propuestas por la DGB (2013) se plantea “resolver problemas que involucren áreas bajo la curva […], calculadas desde la perspectiva geométrica y mediante la integral definida” (p. 23), la cual corresponde al desarrollo de una competencia disciplinar relacionada con la integral definida. Esta demanda del currículum motiva a los profesores a trabajar de esta manera la integral definida desde una representación algebraica y gráfica; como consecuencia los estudiantes incorporan a su sistema de creencias este sentido para la integral definida.

5.2. *El resultado de una integral definida significa área*

Quienes hacen esta conexión matemática (7 estudiantes) declaran que el resultado de $\int_a^x f(x)dx$ significa área, es decir, cuando uno de los dos límites es una variable y el resultado es una función y no propiamente un valor numérico (ver extracto de E4 y Figura 13). Esta conexión matemática refleja una comprensión respecto de lo que significa área bajo una función polinomial cualquiera para estos estudiantes, porque el área es variable según el valor que tome el límite superior. Por tanto, quienes hacen esta conexión tienen una comprensión superior respecto de lo que significa área bajo una función, más de allá de verlo como un valor numérico específico.

Entrevistador: ¿sabes qué significa esta expresión (se le señala la integral definida $\int_1^x 6xdx$)?

E4: es una integral definida.

Entrevistador: ¿qué significa que sea una integral definida?

E4: es igual ¿no? También es como el área bajo una curva.

Entrevistador: ¿lo puedes resolver?

E4: (hace los cálculos y obtiene como resultado $3x^2 - 3$) y así quedaría porque no podemos sumar este número (señala el $3x^2$) con éste (señala el -3).

Entrevistador: ¿por qué?

E4: *porque no son semejantes*, no tienen las mismas expresiones.

Entrevistador: ¿qué significa tu resultado?

E4: *esto* (señala el resultado) *significa que es el área debajo de una curva.*

$$\int 6x\,dx$$

$$6\int \frac{x^{1+1}}{1+1} \qquad 3x^2 \Big|_1^x$$

$$3(x)^2 - 3(1)^2$$

$$3x^2 - 3$$

Figura 13. Cálculo de la integral definida $\int_1^x 6x\,dx$ por E4.

5.3 La integral es la suma de las áreas de los rectángulos inscritos bajo la curva

Esta conexión matemática indica una relación entre un concepto matemático (integral) y su correspondiente significado en el registro geométrico (área), pero en particular, bajo una curva en el plano cartesiano (registro gráfico). Quienes establecen este tema (3 estudiantes) es posible que estén pensando en la Sumas de Riemann (ver extracto de la entrevista a E24 y Figura 14).

> Entrevistador: para ti ¿qué es la integral?
>
> E24: la integral es el área bajo la curva.
>
> Entrevistador: ¿tendrá otro significado?
>
> E24: […] se supone que tenemos algo así (dibuja una parábola en el plano cartesiano). Nosotros tratamos de encontrar eso (se refiere al área); lo hacemos mediante unos rectángulos (inscribe rectángulos bajo la curva que dibujó).

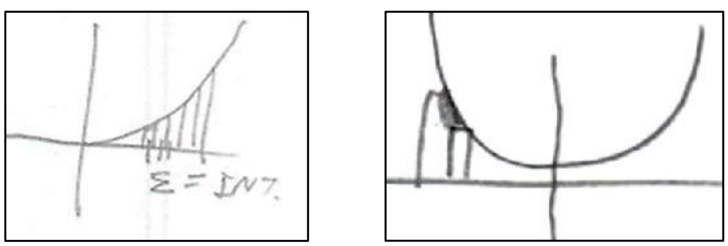


Figura 14. Representaciones gráficas de las sumas de áreas de rectángulos inscritos bajo la curva hecho por E12 y E24, respectivamente.

Por su parte, E12 argumentó:

> E12: si tengo una función (dibuja una curva en el plano cartesiano); debajo de esta función se van formando los rectángulos y la suma de todos estos rectángulos es la integral.

El significado de la integral definida vista como sumas de Riemann es planteado en el programa de estudio correspondiente a Cálculo Integral que, además, plantea que el estudiante resuelva problemas de áreas mediante las sumas de Riemann en cualquier disciplina que tenga relación con su entorno (DGB, 2013b). Esto implicaría que la integral definida recibe ese tratamiento en el salón de clases. Entonces los 3 estudiantes que hacen esta conexión matemática recuperan ese conocimiento de su sistema de creencias.

6. Una integral definida tiene límites de integración

Los estudiantes que hacen esta conexión matemática identifican las diferencias existentes entre dos conceptos matemáticos: integral definida e integral indefinida, al menos algebraicamente. Ellos observan que lo que hace distinto a la primera es un componente en particular, es decir, los límites de integración (ver extracto de E22). La presencia de estos elementos permite que los estudiantes reconozcan qué es y en algunos casos, qué representa o significa el resultado. Esta conexión fue hecha por 8 estudiantes.

> Entrevistador: ¿Tú crees que esto (se le señala la integral definida $\int_1^x 6x\,dx$) es igual que esto otro (se señala la integral indefinida $\int 6xdx$)?
>
> E22: no.
>
> Entrevistador: ¿cuál es la diferencia?
>
> E22: la diferencia es que aquí nos está dando dos posibles valores (señala límites de integración).

Dos de los ocho estudiantes que hacen esta conexión matemática también hacen la siguiente.

6.1 Los límites de integración significan el intervalo donde se debe calcular el área bajo la curva

En una integral definida de la forma $\int_a^b f(x)dx$, a y b son los límites de integración y gráficamente delimitan la región o intervalo en el eje de las abscisas donde se habrá de calcular el área bajo la función $f(x)$ (ver extracto de E24). De los 25 participantes, 3 hacen esta conexión matemática y la declaran en sus argumentos.

> Entrevistador: ¿cuál es la diferencia entre esto (la integral definida $\int_1^x 6x\,dx$) y esto otro (la integral indefinida $\int 6xdx$)?

E24: […] en los dos nos estamos aproximando al valor que es el área, pero en esta (señala la integral definida) ya nos están dando el valor [donde se debe encontrar el área], que es el valor de 1 y equis (señala los límites de integración) y aquí (en la indefinida), no, nos están dando [esos] valores. Creo que esa es la diferencia.

7. La constante de integración C …

En relación con la constante de integración, una componente de la integral indefinida, los estudiantes hacen dos conexiones matemáticas que son descritas enseguida:

7.1 significa una familia de primitivas desplazadas verticalmente en el eje de las ordenadas

Matemáticamente, se sabe que una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$ en un intervalo (a, b) si $\forall x \in (a, b)$ se tiene que $F'(x) = f(x)$. Una familia de primitivas se diferencia sólo por una constante (término independiente). De esta forma, en $F(x) + C$ la C significa que se puede tener una infinidad de primitivas, cuyo significado gráfico es un desplazamiento vertical C unidades sobre el eje de las ordenadas. Esa conexión matemática de la C (constante de integración) con su significado gráfico es hecha por 10 estudiantes. En las tareas algebraicas E2 manifestó lo siguiente:

Entrevistador: ¿Sabes que significa esa C (se le señala la C que E2 añadió a su resultado de la integral $\int 6xdx$)?

E2: [una] familia de [primitivas]; así lo representamos.

Del extracto anterior, se identifica que, si bien E2 no recuerda el término primitiva, sí da evidencia de saber que se refiere a un conjunto de funciones diferenciadas por una constante de integración. En un episodio posterior, es decir, al trabajar con las tareas gráficas E2 da muestra de que sabe que esa C significa una familia de funciones desplazadas verticalmente sobre el eje de las ordenadas C unidades (ver el siguiente extracto de la entrevista a E2).

Entrevistador: ¿y qué valor le diste a C para poder evaluar? (se le señala la antiderivada que él obtuvo previamente, es decir, a $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$)

E2: pues ninguno, bueno […] cuando graficábamos, la C indica que la gráfica se puede representar así, así y así (dice mientras simula dibujar gráficas semejantes a la que construyó, pero desplazadas C unidades verticalmente sobre el eje y).

La conexión matemática emergió porque los estudiantes una vez utilizada la fórmula para integrar funciones polinomiales, obtienen en la antiderivada resultante una constante de integración C. En el caso particular de E2, si bien esboza a $f(x) = x^3 - 3x^2$, es decir, cuando $C = 0$ (Figura 15), reconoce el significado gráfico de la constante de integración.

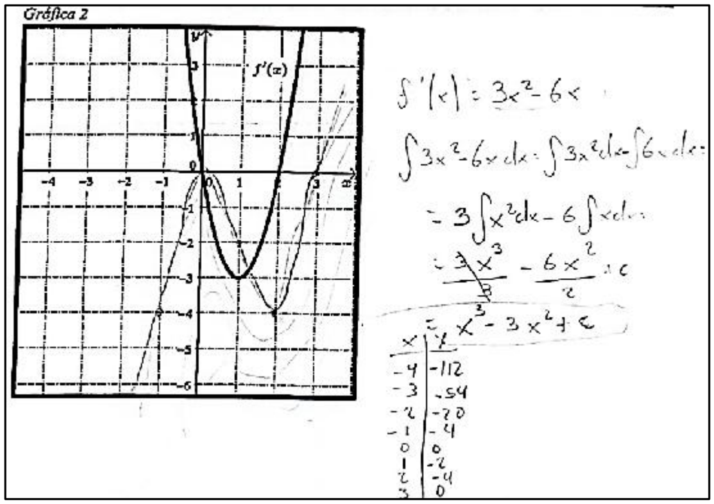


Figura 15. Representación gráfica de una función primitiva hecha por E2 cuando $C = 0$.

7.2 siempre acompaña al resultado de una integral indefinida

Esta es una característica de la integral indefinida en comparación con la definida. Es decir, si se deriva una función polinomial $f(x)$ y luego se pide su integral, entonces en la función antiderivada la C ocupa el lugar de algún término independiente presente en la función original $f(x)$. Por tanto, la antiderivada siempre estará acompañada de la constante de integración en el resultado (ver extracto de E3 y Figura 16). Esta conexión matemática fue hecha por 4 estudiantes.

> Entrevistador: y esta C ¿qué significa (se le señala en el resultado que escribe para la integral indefinida $\int 6xdx$)?
>
> E3: es una constante.
>
> Entrevistador: en otras palabras ¿eso qué quiere decir?
>
> E3: esta es la parte que no cambia de la integral.

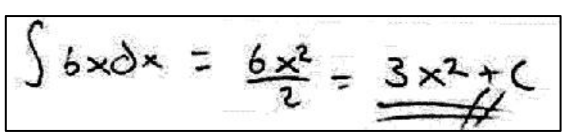


Figura 16. Resultado de E3 para la integral $\int 6xdx$.

Por los argumentos que esgrime E3, así como por las producciones escritas que realiza en distintos momentos de la entrevista, se identifica que reconoce esta característica de la integral indefinida, es decir, que siempre lleva una constante de integración.

8. El diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función

Los elementos que constituyen una integral de la forma $\int f(x)dx$ son: el signo o símbolo de integración ($\int$), la función integrando ($f(x)$) y el diferencial (d*x*). El significado de este último es primordial cuando se tiene más de una variable (integrales dobles o triples), es decir, indicar con respecto a qué variable se debe integrar (ver extracto de E9). Esta conexión matemática entre d*x* y su significado en el contexto de la integración es identificada en la producción de 4 estudiantes.

> Entrevistador: ¿Sabes qué significa esa *dx* (se le señala el *dx* que E9 escribió en la integral $\int 6xdx$)?
>
> E9: Diferencial de *x*.
>
> Entrevistador: Pero ¿tiene algún significado o por qué se le agrega?
>
> E9: Porque es en lo que tienes que valorar *x*, por ejemplo, si tuvieras otra variable podría ser diferencial de *t*, diferencial de *k*, siempre va a estar referida al valor de *x* (variable). Si tuviera otra constante sólo se evaluaría en *x*.

4.1.2 Conexiones matemáticas asociadas al Teorema Fundamental del Cálculo

El TFC relaciona el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral mostrando que la diferenciación y la integración son procesos inversos. Ese teorema es esencial en Bachillerato ya que es el primer contacto del estudiante con la matemática formal normada por teoremas que rigen la relación lógica de los contenidos matemáticos. Además, como la DGB (2013b) señala "propicia en el alumnado una evolución en sus capacidades de abstracción y razonamiento que conlleva a una madurez matemática, misma que le será de utilidad en sus estudios superiores" (p. 7). Esto último, es vital porque los estudiantes tendrán un contacto más formal con la matemática en sus estudios superiores y el TFC será base para un gran número de contenidos matemáticos, además de su utilidad práctica para resolver problemas de aplicación.

En ese sentido, es claro que los estudiantes construyen conocimientos básicos o intuitivos en relación con el TFC en el preuniversitario, los cuales incorporan a su sistema de creencias. En los datos identificamos en las producciones verbales y escritas conexiones matemáticas que pueden ser agrupadas en torno al TFC. Estas se describen enseguida.

9. La derivada y la integral son operaciones inversas

Esta conexión matemática establece con mayor fuerza la relación matemática existente entre la derivada y la integral como operaciones inversas y, por lo tanto, lo que una hace la otra lo deshace. Matemáticamente, esta es la idea de la primera parte del TFC. Esta conexión matemática emerge en tres momentos distintos, primero en las tareas algebraicas. En este caso, cuando los estudiantes fueron motivados a comparar $\frac{d}{dx}[\int 3x^2\, dx]$ y $\int \left[\frac{d}{dx}3x^2\right] dx$ (ver extracto de E13), pero también cuando realizan el cálculo de la derivada de la integral de una función polinomial o la integral de la derivada de una función polinomial (ver extracto de E12 y Figura 17). En las tareas algebraicas se hizo presente con una frecuencia de 10.

Entrevistador: ¿para ti esa operación (se le señala $\int \left[\frac{d}{dx}3x^2\right] dx$) y este otro (se le señala $\frac{d}{dx}[\int 3x^2\, dx]$) son iguales o diferentes?

E13: el resultado es el mismo.

Entrevistador: entonces ¿no importa el orden en que se realicen las operaciones?

E13: aja

Entrevistador: y ¿cuál es la razón?

E13: que, si integras y derivas, después te va a dar lo que integraste. Y si derivas y después integras, te va da a dar lo que hayas derivado.

Entrevistador: en este espacio ¿podrías calcular la integral de esa expresión (se le indica la derivada $f'(x) = 6x$ que él obtuvo previamente)?

E12: sí (sólo escribe $f(x) = 3x^2$).

Entrevistador: ¿qué es lo que hiciste?

E12: una manera es que la derivada y la integral son funciones inversas, entonces *al momento de derivar, si ya sé que esto es una derivada y quiero integrarla, como son* *inversas sólo se regresa lo que de por sí era*, *que es esta* (señala a $f(x) = 3x^2$ que era la función origina que él derivó anteriormente), o podría ser también con la fórmula.

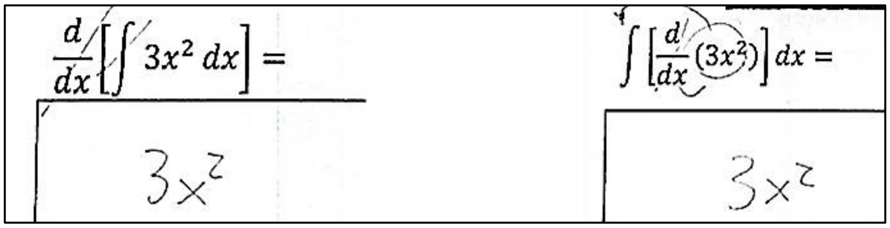


Figura 17. Respuestas escritas de E12 al resolver $\frac{d}{dx}[\int 3x^2\,dx]$ y $\int \left[\frac{d}{dx}3x^2\right] dx$.

Este las tareas gráficas, la idea de la derivada y la integral como operaciones inversas se identificó en las respuestas de 2 participantes. Estos reconocen que $\frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 3) = \int (3x^2 - 6x)dx$, que corresponden a las representaciones algebraicas asociadas a las gráficas que se les proporcionaron (ver extracto de la entrevista a E3).

Entrevistador: ahora puedes ver otra gráfica. Esta corresponde a una función derivada ¿puedes construir la gráfica de su antiderivada? ¿Sabes qué es una antiderivada?

E3: sí, es lo mismo que una integral. (Empieza a escribir $y = 3x^2 - 6x$ guiada por la actividad anterior; parece darse cuenta de la característica inversa de las gráficas).

Entrevistador: ¿cómo sabes que es esa función?

E3: porque fue la que me pusieron hace rato (se refiere a la gráfica de la derivada que construyó en la actividad anterior).

Entrevistador: bueno.

E3: (empieza a integrar la función derivada que escribió, o sea, a $f(x) = 3x^2 - 6x$)

Entrevistador: ¿Me puedes indicar qué estás realizando?

E3: algo hice mal allá (se refiere al ejercicio anterior)

Entrevistador: ¿Por qué?

E3: porque no me da.

Entrevistador: ¿a qué te refieres?

E3: […] ¿cómo lo explico? A ver… *me dicen que calcule una integral ¿no? De ahí sale la derivada [de la función], luego si me dan esa misma derivada y me piden que la integre me tiene que dar lo mismo que acá (señala la función derivada dada),* pero, (revisa sus cálculos y después de un rato dice) ¡Ah, pues ya! Eso se refiere a la constante (señala con un dedo la constante 3 que aparece en la actividad anterior y la constante de integración que obtuvo en su último cálculo, dado que su resultado fue: $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$). Entonces sí estaba bien.

Del extracto anterior se infiere que E3 utiliza la reversibilidad entre la derivada y la integral para deducir el valor que debe tener C (Figura 11); sin embargo, la costumbre escolar le obliga a utilizar la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para integrar la función $f(x) = 3x^2 - 6x$ para encontrar la antiderivada que se le pide y, además recurre al registro tabular para encontrar los puntos que forman parte de la función que se le pide esbozar (Figura 18).

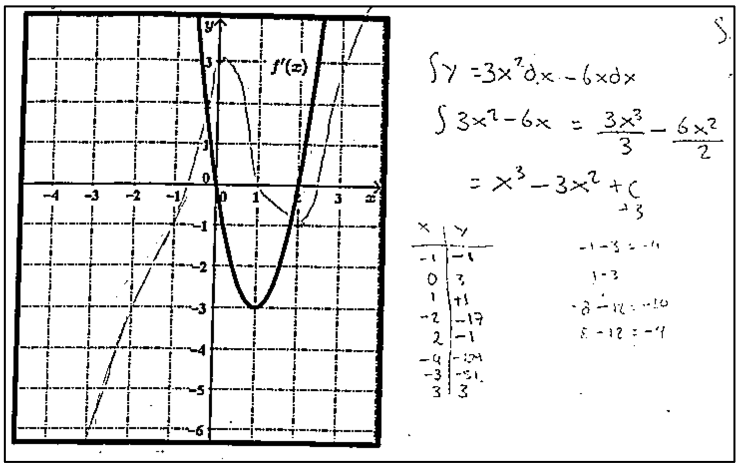


Figura 18. E3 utiliza la relación entre la derivada y la integral para decidir el valor de C.

La conexión matemática entre la derivada y la integral como operaciones inversas también se identificó en una pregunta final en la que se pidió a los estudiantes realizar una visión retrospectiva acerca de resolución de los problemas planteados (en las tareas de resolución de problemas de aplicación) y de las tareas resueltas. La pregunta se centró en la relación que ellos reconocían entre la derivada y la integral (ver extracto de la entrevista a E2). En esta pregunta retrospectiva se encontró la mayor frecuencia, ya que en 22 de los 25 participantes se reflejó que en el sistema de creencias de los estudiantes existe esta conexión matemática.

Entrevistador: […] A partir de los problemas que resolviste o bien de tus conocimientos previos ¿crees que existe alguna relación entre la derivada y la integral?

E2: pues sí, sí creo.

Entrevistador: ¿cuál es esa relación?

E2: pues, […] la derivada y la integral están relacionadas, ya que a partir de una podemos obtener la otra, es decir, son procesos contrarios. Por ejemplo, *si tenemos una función y la derivamos obtenemos una nueva función, pero si a esta nueva función la integramos obtenemos la anterior.* O sea, sí están relacionadas.

En la respuesta de E2 se identificó la procedencia de esa conexión. Él refiere que le fue enseñada por su profesor, pero también refiere que ha validado esta conexión matemática mediante la resolución de ejercicios. Es posible que esto sea así porque ha trabajado generalmente con funciones polinomiales en situación escolar.

Otros estudiantes reconocen la relación entre la derivada y la integral a partir de conceptos físicos, en particular de la posición, velocidad y aceleración de un objeto. Por ejemplo, E3 explicó:

E3: […] si estás en la velocidad, tienes que integrar para llegar a la [función que describe a la] posición y, de la posición tienes que derivar para poder sacar la [función que describe a la] velocidad.

Por otra parte, esta conexión matemática es central para determinar la concepción que algunos de los participantes tienen de la derivada y la integral. En particular, utilizando esta conexión matemática definen lo siguiente:

- La integral es la operación inversa de la derivada (15 estudiantes, 60%).
- La derivada es la operación inversa de la integral (4 estudiantes, 16%).

En relación con la primera, quienes lo hacen consideran que, una vez derivada una función $f(x)$, si se quiere volver a la función original, entonces habrá que integrar el resultado de la derivada (ver extracto 33). Es decir, para ellos integrar es deshacer lo que hicieron con la función al derivarla.

Entrevistador: bueno, para ti ¿qué es la integral?

E3: la integral es para obtener […] lo que iba antes de hacer una derivada, o sea, es como que derivar, pero inverso.

Entrevistador: ok ¿tendrá otra interpretación?

E3: esa sirve para obtener áreas, por ejemplo, en las gráficas… mmm sirve para eso pues, para las áreas

El estudiante E3 considera en otro episodio que con la integral puede verificar si el resultado que obtuvo al derivar es correcto, es decir, funciona como un procedimiento para validar sus resultados.

En relación con asumir que *la derivada es la operación inversa de la integral,* los estudiantes asumen que si integran una función $f(x)$ y luego quieren deshacer ese proceso, entonces lo que deben hacer es derivar (ver extracto de E6). Con esto, reconocen que derivada e integral son operaciones inversas, es decir, asumen en el discurso el enunciado de la primera parte del TFC.

Entrevistador: Bueno. ¿Para ti la que es la derivada?

E6: ¿La derivada?

Entrevistador: aja, lo que tú entiendas, con tus palabras, lo más sencillo que puedas.

E6: es la operación contraria a una integral.

Asimismo, quienes hacen esta conexión matemática declaran que con la derivada pueden comprobar que el resultado de su integral (indefinida) es correcto.

Finalmente, esta conexión matemática es fundamental para establecer las siguientes conexiones que derivan inmediatamente de considerar la relación matemática existente entre la derivada y la integral.

9.1 La derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función

Dado que la derivada y la integral son operaciones inversas, los estudiantes enfatizaron en sus respuestas esa relación entre ambos conceptos. Ellos indicaron que "*la derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función*" (Figura 19). Esta conexión matemática se identificó porque a los estudiantes se les propuso una tarea algebraica de la forma $\frac{d}{dx}[\int(3x^2)\,dx]$ y 15 de ellos, plantean en términos matemáticos que $\frac{d}{dx}[\int f(x)\,dx] = f(x)$. Esto es cierto porque la función $f(x) = 3x^2$ es continua en un intervalo $[a, b]$, es derivable y es integrable y, por tanto, satisface al TFC. Esta conexión matemática la hicieron 15 estudiantes.

Entrevistador: enseguida puedes ver otra operación (se le señala la operación $\frac{d}{dx}[\int 3x^2\,dx]$). ¿sabes qué indica la simbología? ¿Me lo puedes decir?

E17: bueno, creo que esto es la derivada (señala a d/dx), entonces se cancelarían (traza una diagonal que abarca la integral y la derivada).

Entrevistador: ¿por qué se puede hacer eso?

E17: porque esto es derivada y, esto es integral (señala las representaciones algebraicas correspondientes) y son procesos inversos.

Entrevistador: entonces ¿cuál es el resultado?

E17: (escribe $3x^2$).

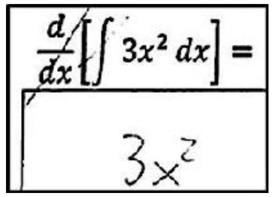


Figura 19. Producción escrita de E10 sobre la derivada de la integral de una función polinomial.

9.2 La integral de la derivada de una función polinomial es la misma función

Esta conexión matemática es la inversa del subtema 9.1. Quienes la hacen están reconociendo que $\int \left[\frac{d}{dx} f(x)\right] dx = f(x)$ cuando $f(x)$ es una función polinomial continua en un intervalo cerrado (ver extracto de E13 y Figura 20), es decir, una parte del TFC. Esta se identificó en las producciones de 12 estudiantes.

Entrevistador: ahora tenemos otras operaciones (se le señala $\int \left[\frac{d}{dx} 3x^2\right] dx$). Acá te piden la integral de la derivada de tres equis al cuadrado ¿cuál es el resultado de estas operaciones?

E13: sería lo mismo (dice mientras cancela la integral y la derivada con una diagonal, al mismo tiempo que escribe como respuesta $3x^2$).

Entrevistador: ¿qué es lo que harías entonces?

E13: nada más quitar esto (cancela la integral y la derivada) y dejar nada más tres equis al cuadrado.

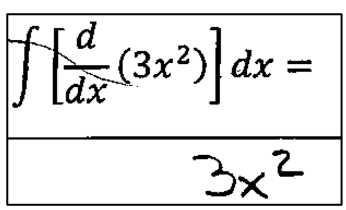


Figura 20. Cálculo de la integral de la derivada de una función polinomial hecha por E13.

E13 argumenta que la razón de su respuesta es que “si derivas y después integras te va da a dar lo que hayas derivado”, es decir, la función original. En este caso, el argumento verbal del estudiante es consistente con la forma en que obtiene su resultado algebraico, aunque no ocurre lo mismo con todos los estudiantes.

Algunos de los participantes reconocen esa relación entre la derivada, pero después de hacer una revisión retrospectiva de sus resultados y procedimientos. Una vez hecha esa reflexión hacen esta conexión matemática, aunque guiados por la costumbre escolar[4] realizan los cálculos algorítmicos previamente, tal como les fueron enseñados en el aula de clases. Sin embargo, reflexionar sobre sus resultados y procedimientos les permite hacer la conexión matemática que relaciona a la derivada con la integral y viceversa.

10. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada $f'(x)$

Los 16 estudiantes que hicieron esta conexión matemática reconocen cómo operar algebraicamente cuando tienen una integral definida. Es la manifestación de la segunda parte del TFC que matemáticamente establece que, si $f\colon [a,b] \to R$ integrable, es continua en el intervalo [a, b] y g: [a, b]→R, es una antiderivada de *f*, es decir, satisface $g'(x) = f(x)$, entonces: $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$ [ver extracto de E23 y Figura 21].

Entrevistador: enseguida se presenta otra operación ¿sabes qué representan esto (se le señalan los límites de integración de $\int_1^x 6xdx$)?

E23: esos son el límite superior e inferior.

Entrevistador: ¿y la expresión en general?

E23: en general es un área, si no me equivoco

Entrevistador: ¿puedes resolver esa operación?

[4]Por costumbre escolar nos referimos a la forma tradicional de dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula de clases. En una clase de matemáticas es el profesor el encargado de dirigir el proceso de enseñanza y los estudiantes los obligados a aprender. Los profesores dictan las lecciones (clase magistral, ejemplos, ejercicios y tareas), mientras que los estudiantes reproducen los métodos y estrategias que les fueron enseñadas por sus profesores donde el procedimiento algorítmico recibe el mayor énfasis. La reflexión por parte del estudiante y la discusión grupal sobre diversas estrategias y métodos para resolver las tareas propuestas mayormente están ausentes. Ello forma en los estudiantes la creencia de que “las matemáticas significan aplicar fórmulas y reglas preestablecidas para obtener los resultados esperados”.

E23: sí. Se saca la integral y se sustituyen los valores de equis (se refiere a los límites). Si no mal recuerdo, este es *b* (señala al límite superior) y este es *a* (señala al límite inferior) y se restan (los señala en la integral definida). Seis equis *dx*, ya lo hice acá arriba y estos se sustituyen por un palito (coloca una vertical para señalar los límites de evaluación). Es *x* y al sustituir por *x* (escribe $3x^2 - 3$) sería esto.

Entrevistador: ¿qué representa o qué significa ese resultado?

E23: el área.

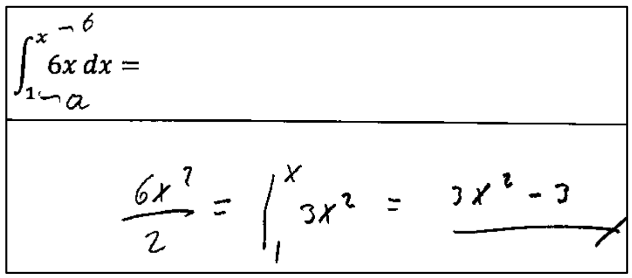


Figura 21. Cálculo de la integral definida por E23.

4.1.3 Conexiones matemáticas asociadas a las representaciones gráficas de funciones derivadas o antiderivadas

Este grupo de conexiones matemáticas se vieron favorecidas por las tareas gráficas que fueron planteadas, pero también por las representaciones gráficas que modelaron los fenómenos físicos propuestos en los problemas de aplicación. En este tipo de conexiones matemáticas el foco de atención fueron las representaciones gráficas asociadas a las funciones polinomiales de grado 1, 2, y 3, así como al significado gráfico del término independiente de una función. Estas conexiones matemáticas fueron de utilidad para esbozar la gráfica de la función derivada o antiderivada, pero también en la resolución de los problemas propuestos.

En este grupo se incluyeron 5 conexiones matemáticas que son descritas enseguida.

11. La representación gráfica…

En relación con las tareas en donde dada una representación gráfica de una función polinomial $f(x)$ se pide a los estudiantes esbozar la gráfica de su derivada y viceversa, dada la gráfica de $f'(x)$ esbozar la gráfica de su antiderivada, los estudiantes hicieron 6 conexiones matemáticas. Para ello, los participantes primeramente requirieron las representaciones algebraicas asociadas a las gráficas dadas (como se previó en el protocolo de la entrevista) para completar las tareas. Una vez teniendo ese dato, completaron las tareas al mismo tiempo que hicieron las conexiones matemáticas que son descritas enseguida.

11.1 *de una función cuadrática o de segundo grado es una parábola*

Los estudiantes que hacen esta conexión matemática identifican que una función polinomial de segundo grado gráficamente representa una parábola en el plano cartesiano (ver extracto de la entrevista a E18 y Figura 22). Es decir, conectan una representación algebraica con su consecuente representación en el plano cartesiano. Esta conexión matemática aparece en las producciones de 14 participantes.

> Entrevistador: ya tienes tu función y tu derivada (se le señala a $f(x) = x^2 - 3x^2 + 3$ y la derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x$ que él obtuvo). ¿Cómo puedes trazar la gráfica de la derivada?
>
> E8: tendríamos que darle un valor a x para poder representarla, [...]. De hecho, se volvería una parábola, [...] porque como esta [gráfica] está así (sigue el trayecto de $f(x)$ con su lápiz), debido a que hay un elemento elevado [señala el término cúbico] al cubo, pero ahorita que la derivé la volví más simple, entonces me queda una parábola. *Cuando una expresión es cuadrática, representa una parábola.*

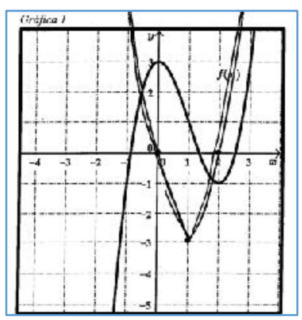


Figura 22. Gráfica de $f'(x)$ esbozada por E23.

Esta conexión matemática también se identificó en las tareas algebraicas. En particular, cuando los estudiantes fueron interrogados sobre los elementos y significado de la función $f(x) = 3x^2$ (ver extracto de la entrevista a E12) o cuando se les cuestionó sobre el resultado de una integral definida que ellos calcularon ($\int_1^x 6x\,dx$) que resultó ser una función cuadrática ($f(x) = 3x^2 - 3$).

Entrevistador: ahí, tú puedes ver una función $f(x)$ igual a algo (se le señala la función $f(x) = 3x^2$), ¿me puedes decir qué significa esa expresión y cuáles son sus elementos? E12: representa una parábola, pero sus elementos, me parece que es así (dibuja una parábola cóncava hacia arriba).

11.2 de una función lineal o de primer grado es una línea recta

Diez participantes establecen una asociación entre la presentación algebraica de una función lineal y su correspondiente representación gráfica, es decir, relacionan una función de grado 1 con una línea recta en el plano cartesiano (ver extracto de la entrevista a E24 y Figura 23). Según estos estudiantes, la inclinación de la recta puede variar según el valor que tenga la pendiente, así como su signo.

E24: […] se supone que la gráfica de la equis cúbica es así (dibuja la gráfica de una función cúbica estándar), la gráfica de la equis cuadrada [función cuadrática] es una parábola (hace una representación de ella). Equis a la cero es así (dibuja una línea recta y horizontal), equis a la uno es así (dibuja una línea recta creciente).

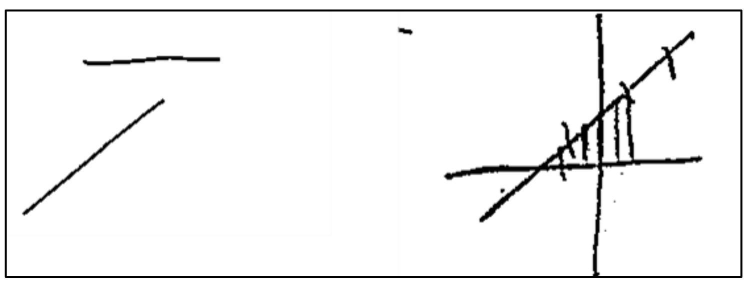


Figura 23. Distintas representaciones que esboza E24 para una función de primer grado.

En otros episodios de la entrevista, los estudiantes dan cuenta de tener un buen dominio de las representaciones algebraicas de las funciones polinomiales de primer grado. Por ejemplo, en la resolución de problemas de aplicación se presentó el problema donde una recta representaba la velocidad de un objeto y se les pedía encontrar la representación algebraica que modelara la posición del mismo en cualquier instante (actividad 3, parte III del protocolo). Para ello, los participantes tenían primero que encontrar la función asociada a la gráfica dada. En ese contexto, cuatro estudiantes (E3, E15, E23 y E25) refirieron que era importante encontrar valores correctos de *m* y *b* para encontrar la ecuación de la recta dada; sin embargo, sus argumentos y acciones indican que desconocen el procedimiento matemático para hacerlo. Por ello, optaron por encontrarlos al tanteo buscando valores que para cualquier par ordenado (x, y) satisficiera la representación gráfica de la función lineal dada. Es decir, una vez que eligen ciertos valores para *m* y *b*, comprobaron para algunos valores específicos de *x* que la función satisficiera la gráfica (ver extracto de la entrevista a E3).

> Entrevistador: ¿Cómo encontraste esta expresión (se le señala a $v(t) = -10t + 20$, que es la expresión que escribió E3 para la gráfica dada)?
>
> E3: porque es una gráfica [de una función] lineal. Aquí sé que corta en 20 (señala el corte de la gráfica con el eje *y*, es decir, el punto $(0, 20)$), si aquí tuviera cero (señala la variable t presente en la función $v(t)$) va a cortar en 20 (se refiere al valor que tomaría la ordenada cuando *x* sea cero). Luego, en uno (para la variable t) la gráfica va hacia abajo, por lo tanto, sé que el signo de acá (señala a $-10t$ de la función $v(t)$) debe ser negativo; bueno, así uno multiplicado por menos diez, me daría menos diez o menos diez por uno es menos diez, más veinte sería diez, que es lo que está acá (señala al punto $(1{,}10)$). Eso se cumple en la gráfica.

Por la respuesta de E3 se aprecia que considera mentalmente valores para m y b, posteriormente verifica que la gráfica dada contenga como puntos a las parejas ordenadas que encuentra al sustituir distintos valores para la variable *x* en la representación algebraica de la función que encontró.

Por su parte, tres participantes (E8, E13 y E16) encuentran la ecuación de la recta como la enseñanza tradicional les dicta. Es decir, primero encuentran el valor de la pendiente *m* y posteriormente, elijen un punto (x, y) por donde pasa la recta. Con esos dos elementos, usando la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ encontraron la ecuación buscada (ver extracto de E8 y Figura 24).

> Entrevistador: enseguida se proporciona otro problema. Por favor, léelo y responde lo que se plantea.
>
> E8: Sí. (Ubica dos puntos de la recta y encuentra el valor de la pendiente). Creo que esta es su pendiente (señala el -10 que encontró). Después, sustituiría en la ecuación de la recta que es (escribe $y - y_1 = m(x - x_1)$ y luego encuentra su ecuación).
>
> Entrevistador: ¿esa es la ecuación que describe a la posición de la piedra o qué representa?

E8: esta es la ecuación de esta recta (señala la gráfica dada en el problema).

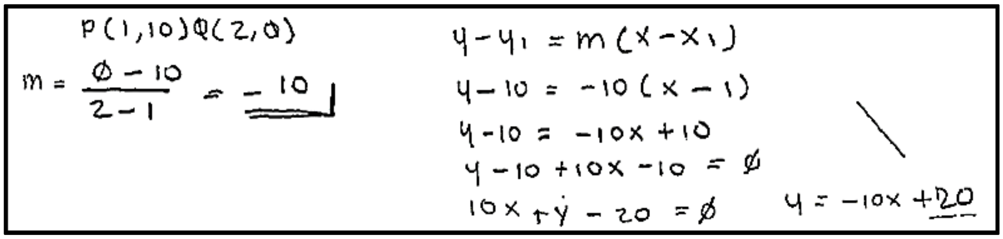


Figura 24. Procedimiento que E8 desarrolla para encontrar la ecuación de la recta dada.

La figura 4 indica que el estudiante E8 ubica dos puntos de la recta y enseguida calcula el valor de la pendiente. Posteriormente, apoyándose de este valor m y utilizando uno de los dos puntos que localizó previamente, encuentra la ecuación de la recta que representaba la velocidad de la piedra en el problema planteado. E16 procede de manera análoga. Sin embargo, E13 para encontrar la pendiente calcula la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{20}{10} = -10$ y utilizando el valor de $b = 20$ (corte de la recta con el eje de las ordenadas) encuentra la ecuación de la recta haciendo uso de la fórmula $y = mx + b$ (Figura 25).

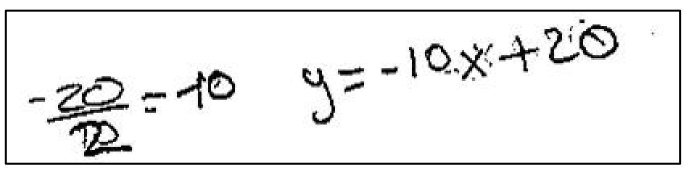


Figura 25. Procedimiento de E16 para hallar la ecuación de una recta.

11.3 del término independiente de una función es el valor donde corta al eje de las ordenadas
Esta conexión matemática se hace a partir de la información que ofrece la representación algebraica proporcionada al estudiante, es decir, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ (ver extracto de la entrevista a E18). A partir de esta expresión, 5 participantes asocian el valor del término independiente con su respectivo significado en la gráfica de la misma, es decir, lo con el corte que tiene la gráfica en el eje de las ordenadas. Asimismo, en algunos casos son capaces de apreciar el proceso inverso, es decir, a partir de la información visual que ofrece la gráfica de la función $f(x)$ que se les proporciona, identifican el valor que debe tomar y cuando x es igual a cero, es decir, el valor del término independiente asociada a la gráfica dada.

Entrevistador: si tú conocieras la fórmula [representación algebraica] que describe a la gráfica dada ¿qué harías para trazar la gráfica de la derivada?

E18: la derivaría, después trataría de localizar dónde se encuentra (parece referirse a los puntos por donde pasaría la gráfica).

Entrevistador: si esta es la expresión (se le proporciona $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$) cuya representación gráfica es la que se te proporciona.

E18: a bueno, por ejemplo, aquí ya entendería porque es así (sigue la trayectoria de la curva con su lápiz). Por ejemplo, *aquí (señala el +3) tendría que ser más tres porque cuando tienes un [término] independiente significa dónde corta en y*, por ejemplo, aquí es más tres: uno, dos, tres (cuenta las unidas en el eje y) se encuentra aquí (señala el punto (0,3)) y pasa por menos uno (señala el $(2, -1)$) porque tu cuando derivas la función este número se convierte lineal (señala a $-3x^2$), digo se le quita el exponente.

11.4 de una función polinomial puede prolongarse en ambos extremos

Cuatro estudiantes indican que el esbozo de la gráfica que hacen, ya sea de la función derivada o de la función antiderivada, es sólo una porción de la misma, sin embargo, esta puede prolongarse tanto como uno quiera en ambos extremos (ver extracto de la entrevista a E21 y Figura 26). Con ello, asumen que el dominio de una función polinomial de grado 2 (asociada a la función derivada que se les pidió esbozar) y 3 (asociada a la función antiderivada que se les pidió esbozar) son todos los reales; de esta forma, siempre tendrán su correspondiente valor en el eje de las ordenadas.

Entrevistador: ¿qué crees que necesitas para hacer construir la función original de la cual de obtuvo la gráfica que se te proporciona, es decir, la función antiderivada?

E21: la función derivada.

Entrevistador: es esta (se le proporciona la función $f(x) = 3x^2 - 6x$).

E21: (la copia y parece encontrar su integral mentalmente).

Entrevistador: ¿me puedes explicar cómo obtuviste esa nueva función? (se le señala la antiderivada que obtuvo).

E21: como aquí ya nos está dando la derivada, pues, traté de buscar la función antes de que la derivarán, porque aquí se bajaría el tres (el coeficiente de la antiderivada), como se le resta uno [al exponente] da esto (señala el 2, exponente del término cuadrático de la función derivada), y estos se multiplican (señala el exponente 2 y el coeficiente 3 de la función antiderivada), da seis y, a esto se le resta uno (exponente del término cuadrático de la antiderivada) da *x*.

Entrevistador: ¿podríamos decir que lo hiciste al revés? Es decir, ¿pensaste primero en una función y viste si su derivada se correspondía con la función que se te dio?

E21: sí.

Entrevistador: ¿podrías construir la gráfica de esa función (se le señala la función antiderivada que encontró previamente: $f(x) = x^3 - 3x^2$)?

E21: (construye una tabla de valores, luego ubica los puntos en el plano en el intervalo $[-1, 3]$ y los une para formar la curva pedida).

Entrevistador: ¿qué pasa en los extremos, hay gráfica?

E21: sí, aquí es para abajo (señala el intervalo $(-\infty, -1]$) y aquí es para arriba (señala el intervalo $[3, +\infty)$).

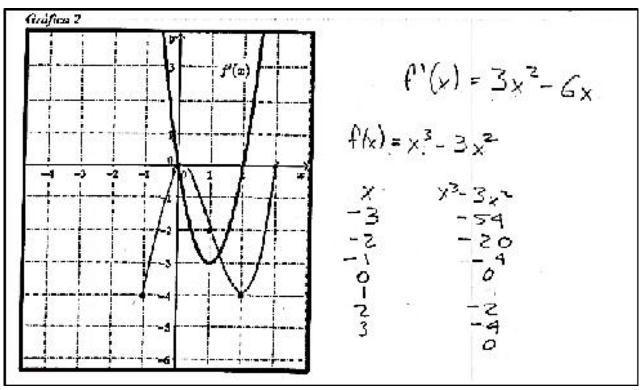
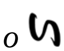
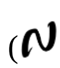


Figura 26. Construcción de la función antiderivada hecha por E21.

11.5 de una función cúbica o de tercer grado es como una "S" acostada ( *o* *)*

Tres estudiantes hacen esta conexión matemática cuando asocian a una función cúbica con una S alargada y acostada en su representación gráfica. Según ellos, la representación gráfica adquiere diferentes formas según los valores y signos de los términos cúbicos, cuadráticos y lineales, así como el valor del término independiente (véase el extracto de la entrevista a E7 y Figura 27). De los tres estudiantes que hicieron esta conexión matemática, uno hizo una representación gráfica para referirse a una función cúbica (Figura 5), mientras que los otros dos, con gestos simularon dibujar con un dedo una representación gráfica de la función cúbica y, declararon verbalmente que estas representaciones eran similares a una "S" acostada ( *o* ).

Entrevistador: Aquí puedes ver indicada la gráfica de una función $f(x)$ cuya expresión no está dada, ¿podrías graficar en este espacio la derivada de esta función?

E7: Sí (dice mientras escribe inicialmente x^3).

Entrevistador: ¿Cómo sabes que debe ser una expresión de grado 3?

E7: Pues es equis cúbica, dependiendo de la expresión a integrar serán los puntos donde suba o baje la gráfica. La equis cúbica, la identifico como una "S", muy delgadita, que pasa así (esboza la gráfica de una función cúbica), y se va, ya solo quiero una equis cuadrada que coincida con esta (señala a la gráfica dada).

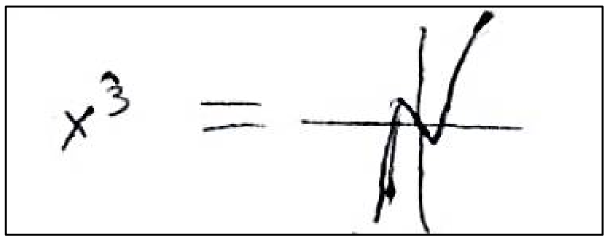


Figura 27. Representación gráfica de una función cúbica hecha por E7.

12. La forma de una representación gráfica asociada a una función polinomial permite identificar el grado de esta

Una representación gráfica asociada a una función polinomial puede ayudar a saber si corresponde a una función de grado uno (lineal), de grado dos (cuadrática) o de grado tres (cúbica). Por ello, en los argumentos de 8 estudiantes apareció esta conexión matemática. Los estudiantes pese a que no pueden determinar las representaciones algebraicas asociadas a las gráficas, sí pueden saber de qué grado son (ver extracto de la entrevista a E22 y Figura 28) con el apoyo visual que ofrecen las gráficas proporcionadas.

Entrevistador: […] Aquí tú puedes ver la gráfica de una función $f(x)$ cuya expresión algebraica no está dada. ¿Podrías…?

E22: es una [función] de tercer grado.

Entrevistador: ¿cómo sabes que es de tercer grado?

E22: por que mire, supongamos que está este (escribe x) […], esta es de forma lineal (dibuja rectas, que luego borra) positiva o negativa dependiendo del valor que nos den. Cuando [la variable] está elevada al cuadrado, [entonces] son parábolas, dependiendo puede abrir hacia arriba o hacia abajo. Ya pues en este caso, las de tercer grado se parecen a las de primero, son como culebritas, […] en este caso (señala la gráfica dada) es una de tercer grado.

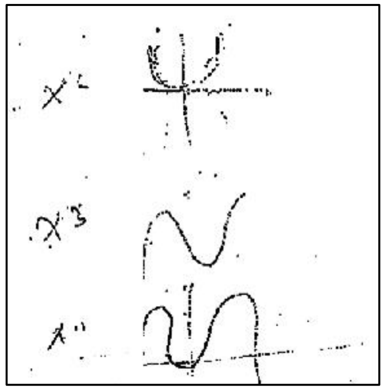


Figura 28. Representaciones gráficas auxiliares dibujadas por E22 para explicar el significado de “forma” de una gráfica.

Por los argumentos que esgrime E22 es evidente que, con forma de una gráfica, hace referencia a la concavidad de ellas, los ceros de la función, el signo del coeficiente del término lineal, cuadrático, cúbico o cuartico, así como al grado asociado a la representación algebraica correspondiente. En ese sentido, para él, una representación gráfica ofrece información visual para determinar estos elementos, pese a que no puede encontrar algebraicamente la función asociada a la gráfica que se le proporciona.

Esta conexión matemática parece permear en las otras conexiones que los estudiantes establecen, en particular aquellas relacionadas con las características que tiene la gráfica de una función lineal, cuadrática y cúbica.

4.1.4 Conexiones matemáticas asociadas a conceptos biológicos

Estas conexiones matemáticas fueron posibilitadas por las tareas 1 y 3 de la parte IV planteadas en el protocolo de la entrevista. En el 1, dada la representación algebraica que modela la población total de cierta especie de animales se pidió a los estudiantes encontrar otra representación algebraica que sirviera para calcular la velocidad de crecimiento y, además, que calcularan la velocidad en $t = 2$. Mientras que el problema 3 es el inverso. Ambos problemas involucraron conceptos extramatemáticos y en particular, biológicos, tales como velocidad de crecimiento de una población y población total de una especie de animales. Esta exploración entre conceptos matemáticos y de otra disciplina, favoreció la aparición de cuatro conexiones matemáticas que se describen enseguida.

13. Calcular la velocidad de crecimiento de una especie significa encontrar la derivada de la representación algebraica asociada a la población total

Los 14 estudiantes que hicieron esta conexión matemática refieren que, si en un problema se les proporciona una función o representación algebraica que modela cierto fenómeno y se les pide calcular la velocidad de crecimiento, entonces el cálculo solicitado es la derivada. Es decir, utilizan el término “velocidad” como conector para decidir el uso de la derivada (ver extracto de E5 y Figura 29). Para esto, se guían de la expresión algebraica proporcionada y la pregunta asociada al fenómeno modelado.

> Entrevistador: enseguida se plantean algunos problemas, léelos y trata de resolverlos.
>
> E5: (lee el problema 1 y derivada la función que modela a la población total de animales. Enseguida sustituye el valor de $t = 2$ en la función derivada para responder la segunda pregunta).
>
> Entrevistador: ¿me puedes indicar qué hiciste?
>
> E5: […] para calcular la velocidad de alguna expresión, sería la primera derivada, es lo que hice. Como me piden la velocidad de crecimiento de la población ya me están dando el valor de *t*, te dije que la velocidad era la primera derivada, entonces sólo sustituí el 2 en donde estaba la t.

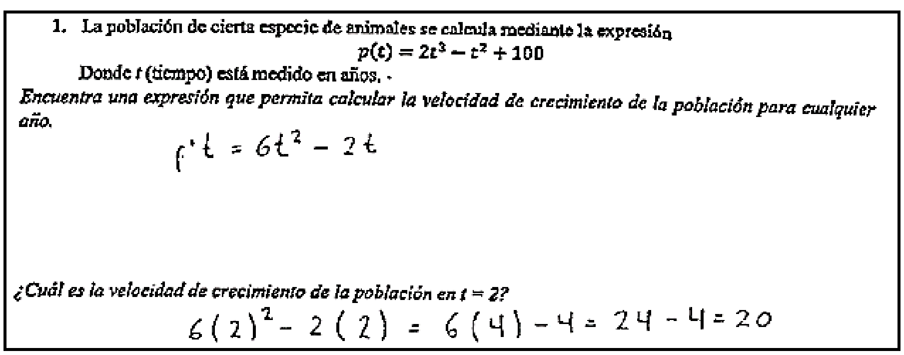


Figura 29. Cálculos efectuados por E5 para resolver el problema 1.

Otro estudiante que también utiliza la palabra “velocidad” como conector para decidir el uso de la derivada es E2, tal como se puede apreciar en el siguiente extracto:

Entrevistador: en la siguiente parte de la entrevista se plantean algunos problemas y dos preguntas por cada uno. Te pido que leas cada problema y trata de resolverlos.

E2: Ok. (Empieza a resolver el primer problema. Después de un rato derivada la función $p(t)$ dada y luego evalúa para $t = 2$ en la derivada que obtuvo).

Entrevistador: Me puedes explicar ¿qué hiciste?

E2: pues se dice que esta es la expresión de la población de una especie (señala a la función $p(t)$) donde el tiempo está dado en años, el tiempo se representa por t. Dice que encuentre la expresión que ayude a calcular la velocidad de crecimiento. Recuerdo que para calcular la velocidad derivábamos la expresión; para calcular la expresión de la velocidad derivamos la anterior (señala a $p(t) = 2t^3 - t^2 + 100$) y pues me da como resultado esto (señala la función derivada $p'(t) = 6t^2 - 2$ que obtuvo). Luego, dice que ¿cuál es la velocidad de crecimiento de la población en $t = 2$? Y bueno, aquí sustituí, sólo que lo hice más directo. Sustituí el 2 para t y pues me da este resultado (señala el 20 que obtuvo como resultado).

Entrevistador: ¿Por qué se te ocurrió utilizar la derivada aquí (se le señala la primera pregunta)?

E2: por velocidad (encierra la palabra velocidad); en física vimos algo parecido que podíamos utilizar el Cálculo Diferencial e Integral en diferentes aplicaciones.

Tanto en la respuesta de E2 como de E5 se identifica que ambos estudiantes recurren al sistema de creencias atribuido a la física y al Cálculo, en particular en la relación que los une, es decir, en el uso de la derivada para resolver problemas extramatemáticos que solicita calcular *velocidades*. Sin embargo, es probable que en situación escolar también hallan resuelto problemas similares, dado que en el programa de estudio de Cálculo Diferencial se plantea dentro de las competencias a desarrollar en los estudiantes que éstos, resuelvan "gráfica y algebraicamente derivadas para resolver problemas de física, química, naturales, sociales, económicos, administrativos y financieros" (DGB, 2013a, p. 24).

15. La integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total

Los 12 participantes que hicieron esta conexión matemática reconocen la relación matemática existente entre la velocidad de crecimiento de cierta especie de animales, vista como una función polinomial, y la población total de la misma. De esta manera, asumen que la integral de la función $r(t)$ (que modela la velocidad de crecimiento) les ayuda a obtener la función $p(t)$ (que modela la población total) mediante el cálculo de una integral (ver extracto de E4 y Figura 30).

Entrevistador: ok. Pasemos al siguiente problema (se le señala el problema 3).

E4: *(lee)* ahorita podríamos integrar.

Entrevistador: ¿por qué?

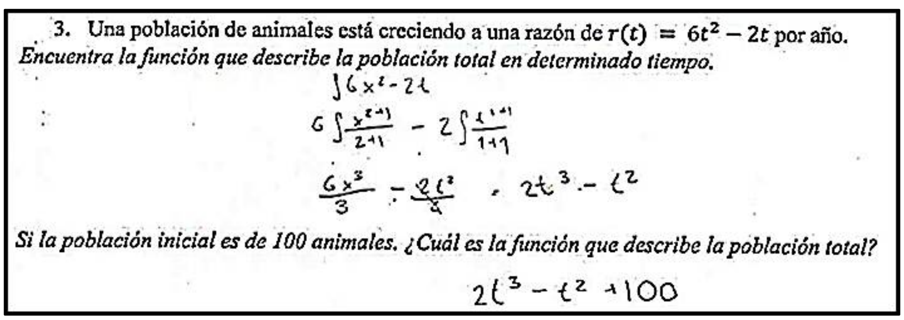
E4: porque te está dando la velocidad, por así decirlo, pero tú quieres saber la población total.

Entrevistador: ¿cómo sabes que te están dando la velocidad?

E4: porque dicen que está creciendo a una razón, cuando te están diciendo eso, bueno es velocidad.

Entrevistador: ok. ¿Lo puedes hacer?

Deysi: (integra la expresión $p(t)$ y obtiene como resultado $r(t) = 2t^3 - t^2$).



3. Una población de animales está creciendo a una razón de $r(t) = 6t^2 - 2t$ por año. *Encuentra la función que describe la población total en determinado tiempo.*

$\int 6x^2 - 2t$

$6\int \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\int \frac{t^{1+1}}{1+1}$

$\frac{6x^3}{3} - \frac{2t^2}{2} \quad 2t^3 - t^2$

Si la población inicial es de 100 animales. ¿Cuál es la función que describe la población total?

$2t^3 - t^2 + 100$

Figura 30. Producción escrita de E4 para resolver el problema 3.

13. En $\int r(t)dt = p(t) + C$ la constante de integración C significa población inicial de animales

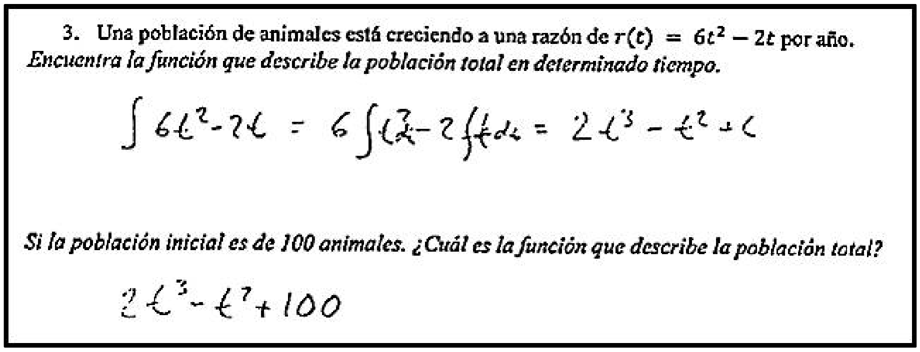
En la expresión $\int r(t)dt = p(t) + C, r(t)$ modela la velocidad de crecimiento de una cierta especie de animales, mientras que $p(t)$ la población total. Por tanto, los 11 estudiantes que hicieron esta conexión matemática hacen referencia sólo al significado de la constante de integración que se obtiene al integrar la función que modela la velocidad de crecimiento (ver extracto de E13 y Figura 31). En este sentido, los estudiantes asocian un concepto matemático (constante de integración) con uno extramatemático (población inicial de animales).

Entrevistador: pasemos a la siguiente pregunta del problema planteado (tarea 3).

E13: (lee la pregunta del problema 3 y escribe $p(t) = 2t^3 - t^2 + 100$) sería esa.

Entrevistador: ¿por qué?

E13: porque si [se] habla de población inicial, entonces en t el valor seria cero. Ya no están contando nada, no se están contando cuántos años pasaron, ni nada y, si dice que la población inicial es cien, se tiene que sustituir el cien en C.



3. Una población de animales está creciendo a una razón de $r(t) = 6t^2 - 2t$ por año. *Encuentra la función que describe la población total en determinado tiempo.*

$\int 6t^2 - 2t = 6\int t^2 - 2\int t\,dt = 2t^3 - t^2 + C$

Si la población inicial es de 100 animales. ¿Cuál es la función que describe la población total?

$2t^3 - t^2 + 100$

Figura 31. Resolución de E13 al problema 3.

16. El resultado de $p'(2) =$ 20 significa que justo en el segundo año la población aumentó 20 especies

La tarea b del problema 3 proponía calcular la velocidad de crecimiento en un tiempo específico, $t = 2$, es decir, $p'(2)$ y la pregunta auxiliar durante la entrevista fue ¿qué significa el resultado que el estudiante encuentra? Al respecto, 7 estudiantes indicaron que justo en 2 años la población aumentó 20 especies (ver extracto de E24).

Entrevistador: ese 20 (se señala la respuesta del estudiante a la pregunta b del problema 3) ¿qué quiere decir o qué significa?

E24: es la velocidad de crecimiento de la población.

Entrevistador: y, en otras palabras, ese 20 ¿qué significa?

E24: crecimiento… o sea, según yo, si se supone que la t es tiempo, entonces serían 2 años, entonces se podría decir que en 2 años la población creció en 20 [animales]. Es lo que yo puedo observar.

4.1.5 Conexiones matemáticas asociadas a conceptos físicos

Los problemas (2 y 4) que planteaban el cálculo de la posición de un objeto y su velocidad, conceptos relacionados con la física, posibilitaron que surgieran conexiones matemáticas asociadas a estos conceptos físicos. Es probable que en las clases de matemáticas se propongan algunos problemas similares, tal como lo manifestaron algunos participantes durante la entrevista, además de que el plan de estudio correspondiente a los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo integral lo consideran como contenido extramatemático (DGB, 2013a, 2013b). Posiblemente esto posibilitó que surgieran cinco conexiones matemáticas asociadas a conceptos físicos que se describen enseguida.

17. La integral de la función aceleración de un objeto es su velocidad y la integral de la función velocidad es su posición

El problema 4 ofrecía una gráfica que modela la velocidad de un objeto lanzado hacia arriba con velocidad inicial de 20 m/s y se pedía encontrar la fórmula (representación algebraica) que permite calcular la posición de dicho objeto. Esto permitió que 15 estudiantes declararan que, si $v(t)$ modela la velocidad de un objeto, entonces $\int v(t)dt$ es la posición del mismo en determinado tiempo (ver extracto de la entrevista a E3 y Figura 32).

> Entrevistador: [...]Ahí puedes ver planteado otro problema. Léelo y trata de resolverlo (se le señala el problema 4).
>
> E3: (lee el problema, luego escribe en forma vertical x, v, a, en seguida pinta una flecha que va de *v* a *x*, esto lo acompaña del símbolo integral. Posteriormente escribe $v(t) = -10t + 20$. Finalmente, integra esta función y obtiene $s(t) = -5t^2 + 20t + C$).
>
> Entrevistador: ¿me puedes decir qué hiciste?
>
> E3: esto es lo que le decía hace rato (señala lo que escribió x, v, a) que es como si tuviéramos que *x* representa a la posición, *v* es velocidad y aquí la a sería aceleración. Si se quiere pasar de la velocidad a la posición se tiene que integrar, o sea, si van hacia acá (indica la flecha que va de *v* a *x*), se integra. Si van hacia este lado (indica las flechas con un sentido diferente e inverso, es decir, que va de x a v) se deriva. Y aquí lo que me están dando es la gráfica de la velocidad. Si encuentro la [función asociada a la] gráfica tendría lo que es la velocidad, ya de la velocidad tendría que pasar a la posición.

Otros estudiantes hicieron esa conexión matemática cuando se les pregunta sobre la relación existente entre la derivada y la integral (ver extracto de la entrevista a E7):

> Entrevistador: A partir de los resultados que encontraste en este cuestionario o de tus conocimientos previos, ¿crees que existe una relación entre la derivada y la integral?
>
> E7: Sí.

Entrevistador: ¿Cuál es esa relación que existe entre ellas?

E7: Por ejemplo, […] si tienes la posición de una función que te rige el lugar exacto en donde va a estar x partícula, con la derivada puedes tener su velocidad y su aceleración, pero si tienes su velocidad y su función, puedes calcular el lugar en donde va a estar [con la integral], es decir, la función que va a regir la posición exacta.

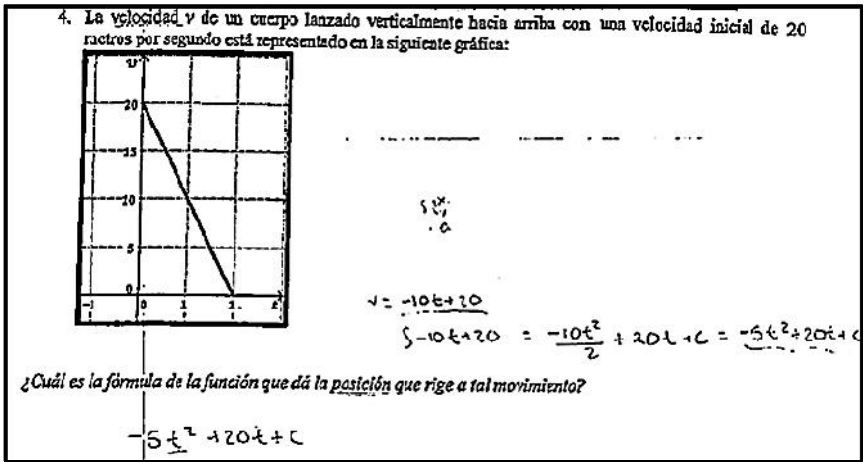


Figura 32. Producción escrita de E3 al resolver el problema 4.

Asimismo, 4 de estos 15 estudiantes declararon que, si $a(t)$ modela la aceleración de un objeto, entonces su velocidad es $\int a(t)dt = v(t)$, es decir, la integral de la función aceleración es la función velocidad (ver extracto de la entrevista a E12).

E12: […]. La derivada puede ser partiendo desde la posición a la velocidad y partiendo de la velocidad a la aceleración. *Con la integral es al revés, partiendo de la aceleración puedo llegar a la velocidad y de la velocidad a la posición.* Son sólo operaciones inversas (se refiere a la derivada y la integral) que si van juntas se cancelan y, que una evalúa a la pendiente de la función y la otra el área que tiene debajo.

18. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración

Esta conexión matemática es inversa a la anterior, dado que también relaciona a la posición con la velocidad, pero partiendo del primer concepto. En ese sentido, 14 participantes refirieron que si $s(t)$ modela la posición de un objeto, entonces $\frac{d}{dt}s(t)$ es su velocidad en determinado tiempo (ver extracto de la entrevista a E23 y Figura 33).

Entrevistador: esta es la función que representa a la posición de la piedra (se le proporciona la función que describe a la posición del objeto para el problema 2) ¿qué crees que se debe hacer para encontrar la solución?

E23: […] Como le había dicho anteriormente, es posición, velocidad y aceleración, es de física (escribe verticalmente p, v y a). Estamos hasta acá arriba (señala la p de posición) si nosotros bajamos (señala la *v* de velocidad) tenemos que derivar. Entonces (copia $s(t)$ que modela la posición del objeto). Lo que vamos a hacer es derivar (calcula la derivada de $s(t)$). Entonces, la velocidad es menos diez *t* más veinte (señala su resultado $s'(t) = -10t + 20$).

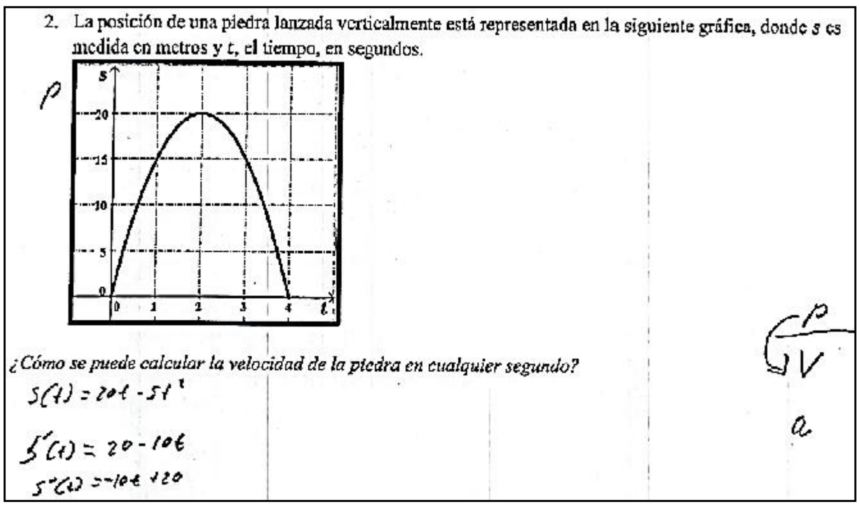


Figura 33. Producción escrita de E23 al resolver el problema 2.

Por otra parte, 9 de los 14 estudiantes que hicieron esta conexión matemática, indican además que, si $v(t)$ modela la velocidad de un objeto, entonces $\frac{d}{dt}v(t)$ permitirá encontrar su aceleración en algún instante t. Si bien en el protocolo de la entrevista no se pidió calcular la aceleración, los estudiantes hacen esta conexión matemática porque fueron instruidos sobre la relación matemática que guarda la posición, la velocidad y la aceleración como ellos refieren durante la entrevista (ver extracto de la entrevista a E12) y tal como lo contempla el programa de estudio de Cálculo Diferencial (DGB, 2013a).

Entrevistador: a partir de las actividades que realizaste o de tus conocimientos previos, ¿crees que existe alguna relación entre la derivada y la integral?

E12: sí, para empezar que ambas evalúan a una función cualquiera. *La derivada puede ser partiendo desde la posición a la velocidad y partiendo de la velocidad a la aceleración*. […] Son sólo operaciones inversas *que si van juntas se cancelan*.

En el extracto anterior, además de la conexión enunciada arriba se identifica una variedad de conexiones matemáticas que el estudiante establece al mismo tiempo. Es importante destacar que esto lo hace mientras reconoce la dirección bidireccional entre la derivada y la integral, la posición y la velocidad, la velocidad y la aceleración y, finalmente entre el cálculo de la pendiente de una recta tangente y el área bajo una función.

19. La velocidad de un objeto en su altura máxima es cero

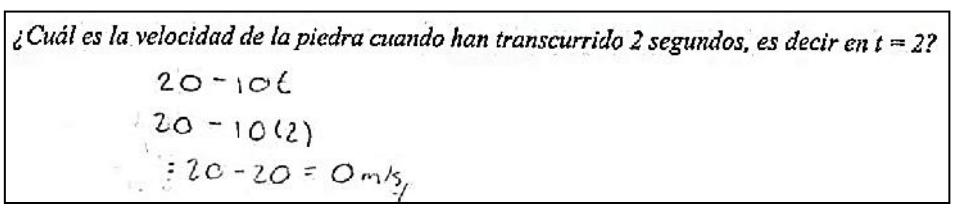
Trece estudiantes refieren que si un objeto alcanza una altura máxima en un tiempo $t = a$, entonces su velocidad en ese instante es cero, es decir, $v(a) = 0$ (ver extracto de la entrevista a E4 y Figura 34).

Entrevistador: podrías resolver el siguiente problema (se le señala la pregunta b del problema 2).

E4: sí (deriva la función posición y calcula la velocidad para $t = 2$ en la derivada que obtuvo previamente). *La velocidad sería cero metros sobre segundos*.

Entrevistador: ¿Qué significa ese resultado?

E4: por ejemplo, aquí son los dos segundos (señala en el eje de las abscisas el valor de $t = 2$) y *aquí se detiene* (señala el punto máximo de la parábola), o sea, aquí no tiene alguna velocidad. Cuando alcanza su punto máximo es cuando se llega a detener.


¿Cuál es la velocidad de la piedra cuando han transcurrido 2 segundos, es decir en t = 2?

$20-10t$

$20-10(2)$

$=20-20=0\,m/s$

Figura 34. Solución dada por E4 a la segunda pregunta del problema 2.

20. Encontrar una función primitiva de la posición de un objeto, dada una posición inicial, implica primero calcular una integral y segundo, resolver una ecuación lineal

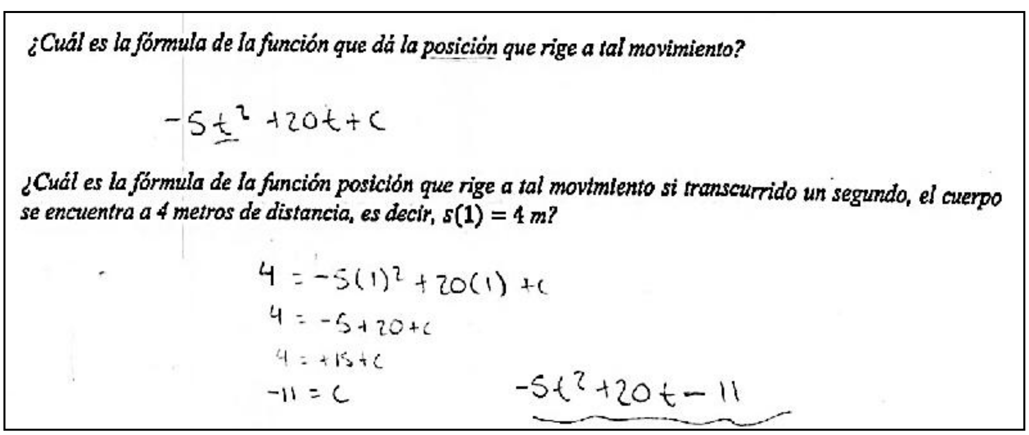
La pregunta b del problema 4 permite la aparición de esta conexión matemática. Matemáticamente, plantea una ecuación diferencial de primer orden con una condición inicial, es decir, buscaba encontrar una función primitiva particular. Los 8 participantes que hacen esta conexión matemática asumen que si $v(t)$ modela velocidad de un objeto y $s(1) = 4$ es una posición inicial, entonces para encontrar la función primitiva que modela la posición en cualquier instante, primero, deben resolver la integral $\int v(t)dt = s(t) + C$ y, posteriormente, resolver la ecuación $4 = s(1) + C$. Con esto último, ellos plantean que encontrarán el valor de C y finalmente, tendrán la función primitiva particular que se les pide (ver extracto de la entrevista a E3 y Figura 35).

Entrevistador: ¿si entiendes la segunda pregunta [del problema 4]?

E4: bueno sí… (piensa durante un largo rato y dice) se sustituye. (Luego, escribe la ecuación $4 = -5(1)^2 + 20(1) + C$ y la resuelve. Su solución es $C = 11$. Finalmente, escribe como respuesta a $s(t) = -5t^2 + 20t - 11$).

Entrevistador: ¿me puedes decir lo que hiciste?

E3: […] Si transcurrido un segundo el cuerpo se encuentra a cuatro metros de distancia; cuatro metros de distancia es lo que se pretende encontrar aquí (señala la función que modela a la posición previamente encontrada por el estudiante) que sería la posición o distancia. Que sea igual a cuatro es igual a esto (señala la ecuación que escribió) y aquí lo que estaríamos buscando es la constante [de integración], esa es la incógnita. Ya desarrollando todo esto llegamos al resultado de que la constante es igual a menos once. Por lo tanto, la fórmula nos quedaría así, menos cinco t cuadrada más veinte t menos once.


¿Cuál es la fórmula de la función que dá la posición que rige a tal movimiento?

$-5t^2 + 20t + C$

¿Cuál es la fórmula de la función posición que rige a tal movimiento si transcurrido un segundo, el cuerpo se encuentra a 4 metros de distancia, es decir, $s(1) = 4$ m?

$4 = -5(1)^2 + 20(1) + C$
$4 = -5 + 20 + C$
$4 = +15 + C$
$-11 = C$

$-5t^2 + 20t - 11$

Figura 35. Cálculos efectuados por E3 para responder la segunda pregunta del problema 4.

21. El resultado de $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en $t = a$

Los 6 participantes que hicieron esta conexión matemática indicaron que si $s(t)$ es una función que modela la posición de un objeto, entonces $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en el instante $t = a$ (ver extracto de la entrevista a E8). Es decir, cuando el objeto es lanzado existe un instante *a* cuando su velocidad es cero, entre el tiempo que es lanzado y el que tarda en alcanzar el suelo, esto es, existe un instante *a* en que el objeto parece detenerse o estar en reposo y posteriormente empieza a caer o a moverse.

> Entrevistador: ¿puedes responder la siguiente pregunta (se le indica la segunda pregunta del problema 2)?
>
> E8: sí. (Sustituye para $t = 2$ en la función $s'(t) = 20 - 10t$) da cero.
>
> Entrevistador: ¿qué significa ese resultado?
>
> E8: que cuando han transcurrido o han pasado dos segundos, *la piedra que se lanzó se queda sin velocidad*.
>
> Entrevistador: gráficamente eso ¿cómo se ve?
>
> E8: se supone que en dos segundos debe tener una velocidad de cero (mientras ubica un punto en $(2{,}0)$ y en $(2, 20)$). *Es aquí cuando comienza a bajar* (señala el punto máximo) y *por el efecto de la gravedad se queda sin velocidad*.

4.2 Tipología de conexiones matemáticas identificadas

Las 22 conexiones matemáticas de la tabla 8 tienen ciertas similitudes y características que permite categorizarlas en grupos bien definidos. Estas categorías se forman a partir de los datos, es decir, de las conexiones matemáticas que los estudian

tes hacen. Esta tipología de conexiones matemáticas que se ha construido se describe enseguida.

4.2.1 Procedimental

Son aquellas conexiones matemáticas donde se hace uso de reglas, algoritmos o fórmulas que establecen de manera predeterminada, dentro de un registro semiótico, la forma para llegar a un resultado (Tabla 9). De esta manera, los estudiantes recuperan de su sistema de creencias aquellos procedimientos que les son de utilidad ante tareas específicas.

Tabla 9. Conexiones matemáticas procedimentales.

1. La derivada de una función polinomial de la forma $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ es $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$.
2. La integral de una función polinomial de la forma $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ es $\boldsymbol{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$.
12. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $\boldsymbol{f'(x)}$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada.
22. Encontrar una función primitiva de la posición de un objeto, dada una posición inicial, implica primero calcular una integral y segundo, resolver una ecuación lineal.

Las conexiones matemáticas descritas en la tabla 9 usan fórmulas de derivada ($\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$), de integral ($\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$), de la segunda parte del TFC ($\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$) y la solución de una ecuación de la forma $s(1) + C = 4$, donde $s(t) + C = \int v(t)dt$ para resolver las tareas propuestas a los estudiantes independientemente de la dificultad que puede provocar el uso de cada de ellas. El uso de estas fórmulas les permite seguir un orden predeterminado para llegar a la solución, aunque otros estudiantes limitados por su sistema de creencias previo, o bien no recuerdan las fórmulas que deben ser utilizadas o bien, encuentran problemas para seguir el algoritmo que les permita llegar a la solución correcta de las tareas propuestas.

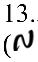
Las conexiones matemáticas procedimentales encontradas en las respuestas de los estudiantes utilizan fórmulas. Sin embargo, no están limitadas sólo a esta característica, sino que esta categoría de conexiones matemáticas incluye el uso de gráficas o esquemas siempre que funcionen como procedimiento o vía para llegar a la respuesta de una tarea que involucra a cualquier concepto matemático. Por ejemplo, un estudiante podría utilizar la gráfica de una función $f(x)$ cualquiera para esbozar la gráfica de su derivada $f'(x)$.

La importancia de las conexiones matemáticas procedimentales reside en que ayudan a simplificar el proceso para hallar una solución, además de que establecen previamente un orden que debe ser seguido para llegar a una solución matemática correcta. Esta tipología de conexiones demanda de los estudiantes recordar fórmulas y reglas específicas en cada caso; sin embargo, esto no siempre resulta fácil para el estudiante que en situación escolar ha sido acostumbrado a utilizar formularios específicos ante cada tipo de tareas. Esto imposibilita que el estudiante comprenda y aprenda qué tipo de fórmulas o reglas pueden ser seguidas ante cada tipo de tareas.

4.2.2 Representaciones diferentes

Esta tipología de conexión matemática se manifiesta cuando los estudiantes representan un mismo objeto matemático utilizando distintas representaciones, por ejemplo, cuando representan una función polinomial algebraicamente en una gráfica en el plano cartesiano. De esta manera, esta categoría de conexiones matemáticas se manifiesta cuando los participantes representaron un mismo objeto matemático en dos formas diferentes (o incluso, equivalentes): algebraico-gráfico, verbal-algebraico, algebraico-geométrico, etc. En esta categoría se agruparon 11 conexiones matemáticas construidas a partir de los datos (Tabla 10).

Tabla 10. Conexiones matemáticas de representaciones diferentes.

3.1 $f'(a)$ significa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$.
5.1 La integral definida significa área bajo la curva.
5.2 El resultado de una integral definida significa área.
5.3 La integral es la suma de las áreas de los rectángulos inscritos bajo la curva.
7.1 La constante de integración C significa una familia de primitivas desplazadas verticalmente en el eje de las ordenadas.
13.1 La representación gráfica de una función cuadrática o de segundo grado es una parábola.
13.2 La representación gráfica de una función lineal o de primer grado es una línea recta.
13.3 La representación gráfica del independiente de una función es el valor donde corta al eje de las ordenadas.
13.5 La representación gráfica de una función cúbica o de tercer grado es como una “S” acostada ( o ).
21. La velocidad de un objeto en su punto máximo es cero.
23. El resultado de $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en $t = a$.

De las conexiones matemáticas indicadas previamente (Tabla 10), dos corresponden a representaciones algebraica-verbal (la 3.1 y la 5.2), seis a representaciones algebraica-gráfica (la 5.1, 7.1, 13.1, 13.2, 13.3, 13.5) y, los dos restantes a representaciones verbal-numérico-gráfico (la 21 y 23). Si bien en las dos primeras transitan de la representación algebraica a la verbal, las respuestas de los estudiantes hacen suponer que la representación gráfica existe en su sistema de creencias, aunque no lo manifiesten o desarrollen en sus producciones escritas. En cambio, en las restantes conexiones matemáticas que hacen, además de utilizar dos representaciones diferentes como la algebraica-gráfica o numérica-gráfica, emplean el lenguaje hablado (representación verbal) en sus respuestas.

Esta tipología de conexiones matemáticas es de suma importancia, porque además de ayudar a comprender mejor un concepto matemático al representarlo utilizando distintos registros de representación, puede ser de utilidad para argumentar una respuesta o solución (por ejemplo, las conexiones matemáticas 3.1 y 5.2 de la tabla 10). Asimismo, esta tipología de conexiones matemáticas es importante en las tareas gráficas porque los estudiantes en la mayoría de los casos no son capaces de transitar de una gráfica a otra gráfica (representaciones equivalentes), sino que requieren de representaciones auxiliares como la algebraica, numérica y tabular para completar las tareas que se les proponen.

La habilidad de los estudiantes para representar un mismo objeto matemático utilizando diferentes representaciones, por tanto, permite que hagan conexiones matemáticas, pero también les ayuda a lograr una mejora en su comprensión matemática. En los datos colectados también se observó que las presentaciones diferentes juegan un papel importante en la resolución de problemas de aplicación, en particular para comprender el fenómeno modelado y para argumentar acerca del significado de sus resultados tanto en términos matemáticos como en el contexto en el que está planteado el problema.

4.2.3 Característica

Esta tipología de conexiones matemáticas se manifiesta cuando los estudiantes identifican para los conceptos matemáticos algunas características específicas que los hace diferentes de otros. Estas cualidades de los conceptos son de ayuda en el momento de distinguir un concepto matemático de otro, para diferenciar simbologías matemáticas, la forma en que pueden ser representados o pueden ayudar a identificar cierto orden en que puedan efectuarse algunos cálculos. Asimismo, la conexión matemática característica se manifiesta cuando se describen las propiedades de los conceptos. En los datos colectados se observó que cuatro conexiones matemáticas (Tabla 11) cumplen con esta caracterización.

Tabla 11. Conexiones matemáticas característica.

4. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.
6. Una integral definida tiene límites de integración.
7.2 La constante de integración C siempre acompaña al resultado de una integral indefinida.
14. La forma de una representación gráfica asociada a una función polinomial permite identificar el grado de esta.

La conexión matemática 4 hace referencia al grado de la función derivada o integral en comparación con la función original y que permite reconocer la operación que se está realizando. Por su parte, la 6 describe una particularidad de la integral definida que la hace diferente de la integral indefinida; la 7.2 hace alusión al resultado de una integral indefinida, en particular de un rasgo que tiene la solución y que permite distinguirla del resultado de una integral definida y, finalmente, la 14 indica la relación que los estudiantes distinguen entre la forma de una gráfica y el grado de la función polinomial asociada a ella.

La conexión matemática característica es importante en la clase de matemáticas cuando se trabaja diversas representaciones algebraicas que pueden producir confusión por su estructura en los estudiantes, lo cual puede conducir a errores y concepciones alternativas en el momento de resolver tareas concretas. Esto demanda que los estudiantes comprendan la estructura matemática de los diversos conceptos matemáticos y una forma de hacerlo es comprendiendo las propiedades de esos conceptos y sus particularidades que, junto a otras tipologías de conexiones matemáticas ayude a tener una mejor comprensión.

4.2.4 Reversibilidad

Esta tipología de conexiones matemáticas se vio favorecida por el tipo de tareas que fueron propuestas y por los conceptos matemáticos que fueron involucrados. Se distinguen porque tienen la particularidad de ser bidireccionales, es decir, pueden partir de un concepto A para llegar a un concepto B e invertir el proceso partiendo de del B para regresar al A. Esto implica que los estudiantes pueden partir de un punto final y seguir el curso de un razonamiento hasta llegar a un punto inicial y viceversa.

Las operaciones matemáticas favorecen la aparición de conexiones matemáticas reversibles porque cada una tiene una operación contraria. En ese sentido, una sirve para comprobar un cálculo correcto de la otra, por ejemplo, cuando un estudiante integra una función puede comprobar su resultado derivando (operación inversa) el resultado de la integral; si ambas funciones son iguales el estudiante habrá validado su resultado. Esta capacidad de concebir procesos reversibles posibilita conexiones matemáticas reversibles, tal como se identificó en los datos colectados (Tabla 12).

Tabla 12. Conexiones matemáticas reversibles.

9. La derivada y la integral son operaciones inversas.
9.1. La derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función.
9.2. La integral de la derivada de una función polinomial es la misma función.
16. Calcular la velocidad de crecimiento de una especie significa encontrar la derivada de la representación algebraica asociada a la población total.

17. La integral de la función velocidad de crecimiento $\boldsymbol{r(t)}$ de una población es la función población total.
19. La integral de la función aceleración de un objeto es su velocidad y la integral de la función velocidad es su posición.
20. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración.

Las conexiones matemáticas presentadas en la tabla 12 algunas son reversibles porque involucran conceptos reversibles entre sí (por ejemplo, las conexiones matemáticas 9, 9.1, 9.2 que abarcan a la derivada y la integral), mientras que otras se extienden al campo de otras disciplinas, pero donde la reversibilidad se ve posibilidad por estar fuertemente relacionadas con operaciones matemáticas. Por ejemplo, las conexiones matemáticas 16 y 17 (tabla 12), así como las 19 y 20 (tabla 12) son reversibles porque hacen referencia a conceptos reversibles en el campo de la biología y la física, respectivamente, donde la derivada y la integral sirven de mediadores para establecer esta relación de reversibilidad.

Esta tipología de conexiones matemáticas es importante porque favorece que el estudiante tome decisiones en el momento de efectuar una operación matemática siempre que recuerde la inversa de esta. Por ejemplo, durante las entrevistas algunos participantes decían que sólo sabían derivar, pero sabían además que la derivada y la integral eran operaciones inversas, entonces recuperaron de su sistema de creencias el algoritmo que les ayudó a encontrar la integral que se les pidió una vez que reflexionaron sobre el procedimiento que seguían en el momento de derivar. Lo mismo sucedió para los conceptos biológicos y físicos, por ejemplo, ellos sabiendo que para obtener la velocidad de un objeto teniendo la función que modelaba su posición sólo tenían que derivar, entonces el proceso inverso implicaba el cálculo de la integral.

4.2.5 Significado

Son aquellas conexiones matemáticas donde los estudiantes le atribuyen un sentido a un concepto matemático en tanto lo que para ellos es (que lo hace diferente de otro) y lo que representa; puede incluir la definición que ellos han construido para estos conceptos. Es diferente de la conexión matemática característica porque no se describen propiedades ni cualidades de los conceptos matemáticos. En su lugar, los estudiantes expresan lo que para ellos es el concepto matemático en sí y puede incluir su contexto de uso (Tabla 13).

Tabla 13. Conexiones matemáticas de significado.

3. La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva.
5. La integral está asociada con el área bajo una curva.
6.1 Los límites de integración significan el intervalo donde se debe calcular el área bajo la curva.
8. El diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función.
15. En $\int \boldsymbol{r(t)dt} = \boldsymbol{p(t)} + \boldsymbol{C}$ la constante de integración C significa población inicial de animales.
18. El resultado de $\boldsymbol{p'(2)} = \boldsymbol{20}$ significa que justo en el segundo año la población aumentó 20 especies.

La conexión matemática 3 define lo que para los estudiantes es la derivada, aunque influenciado por el discurso matemático escolar y por los contenidos de los libros de texto, puesto que este es el significado más frecuente que se le da a la derivada. La 5 y 6.1 hacen referencia a lo que para los estudiantes es y representa la integral y los límites de integración, respectivamente. La 8 indica el sentido que le asignan al concepto diferencial e incluye su contexto de uso, es decir, al momento de efectuar un cálculo: integrar. Finalmente, las conexiones matemáticas 15 y 18 hacen referencia a la interpretación que los estudiantes le dan a sus resultados en el contexto del problema que fue resuelto por ellos, es decir, indica el sentido que ellos les asignan a sus resultados matemáticos.

Esta tipología de conexiones matemáticas es de suma importancia en la clase de matemáticas porque los estudiantes deben darles sentido a los conceptos matemáticos que están aprendiendo. Esto permitiría que reconozcan en qué condiciones o contextos utilizar un concepto o incluso fórmulas, cómo interpretar tanto al concepto en sí mismo, así como el resultado de un proceso previo que involucre cálculos matemáticos. Esos significados que ellos construyan deben ser consistentes desde el punto de vista de las matemáticas, con ello estarán haciendo conexiones matemáticas y logrando al mismo tiempo una comprensión matemática.

4.2.6 Parte-todo

La conexión matemática parte-todo se manifiesta siempre que los estudiantes establezcan relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos, ya sea de generalización (entre casos generales y particulares, como la conexión matemática que se identificó) o de inclusión (cuando un concepto matemático está contenido en otro). En las conexiones matemáticas que hicieron los estudiantes se identificó una donde los estudiantes establecen una relación parte-todo. En particular, en las tareas gráficas apareció la conexión matemática “la representación gráfica de una función polinomial puede prolongarse en ambos extremos” en la que se aprecia una idea intuitiva de generalización.

Esta tipología de conexiones matemáticas resulta importante para desarrollar el razonamiento lógico en los estudiantes, sumamente útil en la clase de matemáticas donde se construyen conjeturas que luego son demostradas para llegar a constituirse en teoremas, lemas o corolarios a partir de proposiciones ya conocidas. Esto a su vez, posibilita el desarrollo de un razonamiento inductivo y deductivo que es consistente con la forma en que se *hace* matemáticas.

La conexión matemática parte-todo, por tanto, es de utilidad en Cálculo por el cúmulo de teoremas que son presentados a los estudiantes y que en el nivel superior deberán demostrar (si estudian ciencias exactas) o aplicar en diversos contextos en su vida profesional (si estudian alguna carrera afín a ingeniería). Sin embargo, en bachillerato su importancia radica en distinguir casos generales y particulares de los conceptos matemáticos, además de que un concepto puede contener a otro. Por ejemplo, los estudiantes pudieran apreciar que $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ es un caso general de $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$ o que éste es un caso particular de aquél, aunque en los datos colectados no hubo evidencia de que los participantes identificaran esta relación entre estas reglas generales (fórmulas) y cálculos específicos (de derivada y de integral).

4.3 Resultados P2: sistema de conexiones matemáticas

Dado que consideramos que las conexiones matemáticas son producto de conocimientos previos y del sistema de creencias que tienen los estudiantes (García-García & Dolores-Flores, 2017a), entonces podemos hacer una analogía con las ideas propuestas por Green (1971). Es decir, consideramos igual que él que "nadie tiene una creencia en total independencia de todas las demás creencias. Las creencias siempre ocurren en conjuntos o grupos " (p. 41). Green describe al sistema de creencias como una estructura tales que algunas son primarias y otras derivadas.

Los resultados descritos anteriormente (tabla 8) indican que las conexiones matemáticas también están fuertemente relacionadas. Los datos indican que hay una conexión central (Figura 36) relacionada con el concepto superior que es objeto de comprensión por el estudiante y que está determinado por las normas oficiales. Esta conexión central permea en la forma en que los estudiantes resuelven todas las tareas propuestas, además de que rige sus concepciones sobre la derivada y la integral. En ese sentido, sirve de soporte para definir lo que ellos entienden por derivada, la forma de obtener la derivada de funciones polinomiales específicas, así como la resolución de problemas de aplicación que requieren del uso de la derivada. Lo mismo sucede para la integral. En García-García & Dolores-Flores (2017a) se hicieron los primeros intentos de explicar este sistema de conexiones matemáticas.

Los resultados indicaron que las conexiones matemáticas que los estudiantes hicieron están asociadas a conceptos como: función, derivada, derivada puntual, integral, constante de integración, diferencial, al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), a las representaciones gráficas de funciones derivadas o antiderivadas, a los conceptos biológicos y a los conceptos físicos. De ellos, el concepto superior que es objeto de comprensión es el TFC porque relaciona matemáticamente a la derivada con la integral, además de que engloba a los otros conceptos y sirve de soporte para resolver los problemas de aplicación. Esto se observó durante la entrevista ya que los estudiantes en distintos momentos establecieron la conexión matemática "la derivada y la integral son operaciones inversas", que es en esencia, la primera parte del TFC.

Asimismo, la segunda parte del TFC también fue identificada entre las conexiones matemáticas que los estudiantes hicieron, es decir, ellos declararon que: "en una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma". Ambas conexiones se asumen como centrales ya que guiaron la actividad de los estudiantes en la resolución de tareas propuestas, aunque el uso de una u otra tuvo diferente frecuencia según el sistema de creencias de los estudiantes, así como el nivel de comprensión que ellos pueden lograr. Esto último, provocó que no todos los estudiantes lograran estas conexiones matemáticas, pero quienes sí lo hacen significa que han logrado cierta comprensión y podrían hacer uso de estas en situaciones intramatemáticas o extramatemáticas.

Los datos también indican que a partir de estas conexiones centrales hay otras que son derivadas inmediatamente de ellas. A estas se les llamó conexiones derivadas de primer orden. La característica de estas es que están asociadas directamente a los dos conceptos centrales del Cálculo: la derivada y la integral que, en un nivel jerárquico, corresponden a un nivel de comprensión menor en comparación con el TFC. Entre estas se tiene por ejemplo la conexiones matemáticas: “la derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$” y “la integral de una función polinomial de la forma $f(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$” (conexiones derivadas de primer orden).

Por otra parte, algunas de las conexiones matemáticas derivadas de primer orden permiten la emergencia de otras, a las que se llamó conexiones derivadas de segundo orden. Por ejemplo, de las conexiones matemáticas anteriores se deriva: “la derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.” (conexión derivada de segundo orden) que se ve posibilitada porque los estudiantes estaban trabajando con funciones polinomiales y, además, del apoyo que reciben de la fórmula de la derivada y de la integral que está presente en las conexiones derivadas de primer orden ya mencionadas.

Por tanto, los datos indican que existe una cadena de conexiones matemáticas que se derivan una de otras y que están relacionadas con un nivel de comprensión superior, desde aquellas que identifican características particulares de un concepto matemático (como la diferencial, la constante de integración, el grado de una gráfica según su forma, entre otras) que son de segundo orden, las que definen conceptos más generales (como la derivada, la integral, la gráfica de una función según el grado y a conceptos como posición, velocidad, población total y velocidad de crecimiento) que son de primer orden, hasta aquellas que están relacionadas con un concepto superior (como el TFC en este estudio). Un estudiante puede establecer esta cadena de conexiones matemáticas, pero no siempre es logrado por todos.

Es importante declarar que entre las conexiones matemáticas existe la relación lógica de implicación (Figura 36). Es de implicación si la existencia de una conexión matemática justifica la existencia de otra de la forma si A entonces B. Esta relación lógica de implicación permite distinguir las conexiones matemáticas de primer y segundo orden. El nivel de comprensión de los estudiantes y el sistema de creencias atribuido a uno de ellos determinará en gran medida que esta relación lógica entre las conexiones matemáticas se manifieste en la tipología de conexiones que cada uno hace.

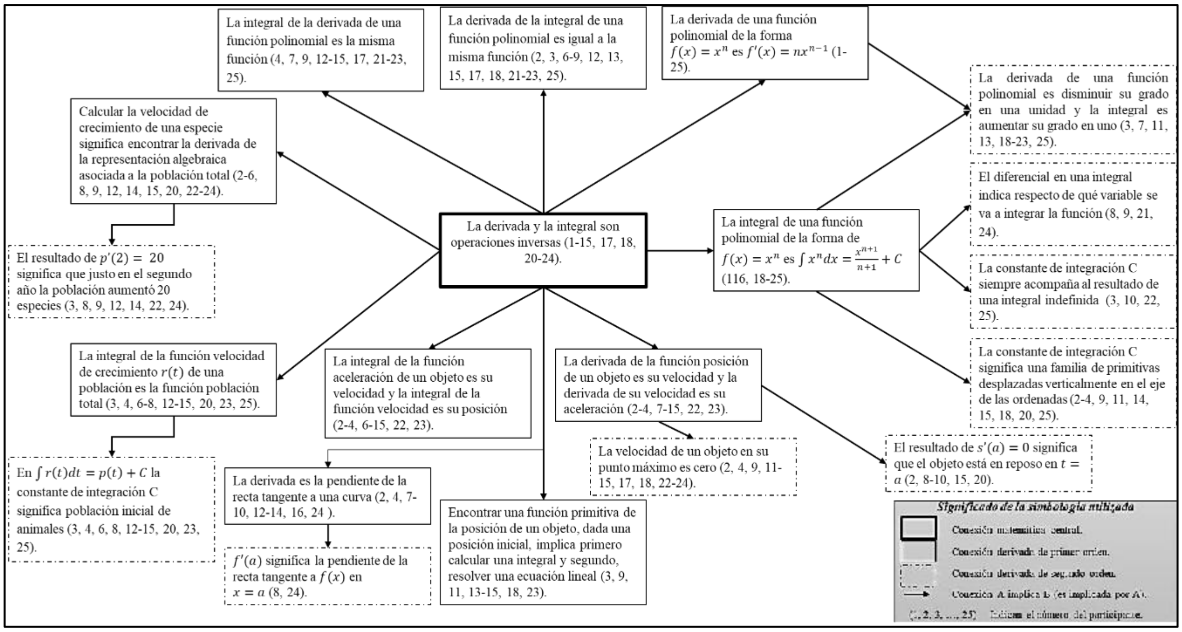


Figura 36. Sistema de conexiones matemáticas asociada a la primera parte del TFC.

A partir de la Figura 36 se puede plantear lo siguiente:

1. La conexión matemática central es "la derivada y la integral son operaciones inversas", porque encierra la comprensión de un concepto matemático superior, a saber, la reversibilidad entre dos conceptos claves del Cálculo: la derivada y la integral. Matemáticamente, es la primera parte del TFC. A partir de este teorema, se derivan otras conexiones matemáticas verdaderas (en el sentido de Businskas, 2008) que contribuyen a reconocer esa relación de reversibilidad y que posibilitan la comprensión del TFC tanto en el contexto matemático como en el extramatemático.
2. Conexiones matemáticas como: "la integral de una función polinomial de la forma de $f(x) = x^n$ es $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$", "la derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración", "la integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total", entre otras son conexiones derivadas de primer orden. Todas ellas se ven posibilitadas por la conexión matemática central, por ejemplo, aquella que relaciona la integral con el cálculo de la posición dada la velocidad y la velocidad dada la aceleración, así como la derivada para encontrar la aceleración dada la velocidad y la velocidad dada la posición de un objeto.

3. La conexión matemática "la integral de una función polinomial de la forma de $f(x) = x^n$ es $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$" permite que emerjan conexiones matemáticas como: "la derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno", "el diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función", "la constante de integración C siempre acompaña al resultado de una integral indefinida" y "la constante de integración C significa una familia de primitivas desplazadas verticalmente en el eje de las ordenadas"; esta últimas son conexiones derivadas de segundo orden. Otras conexiones matemáticas también permiten la emergencia de conexiones derivadas de segundo orden (Figura 36).
4. Finalmente, la variación en el número de estudiantes que hacen las conexiones matemáticas que conforman el sistema anterior significa que la comprensión en relación con la primera parte del TFC se logra a distintos niveles, es decir, en comprender que la diferenciación y la integración son procesos inversos. Si bien, quienes logran apreciar ese proceso lo hacen a partir de tareas algebraicas que les permite identificar que la derivada de la integral de una función polinomial es la misma función y viceversa, la integral de la derivada de una función polinomial es la misma función, esto es buen indicio que han logrado cierta comprensión sobre esta primera parte del TFC y que le es de utilidad para resolver problemas de aplicación que involucra el uso de la derivada y de la integral. El conocimiento de esta primera parte del TC será formalizado en el nivel superior y será de utilidad en matemáticas más avanzadas.

La segunda parte del TFC, matemáticamente, indica que si $f: [a, b] \rightarrow R$ integrable es continua en el intervalo [a, b] y g: [a, b]→R, es una antiderivada de f, es decir satisface $g'(x) = f(x)$, entonces: $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$. Esta conexión matemática central (Figura 37) también posibilita la emergencia de conexiones derivadas de primer y segundo orden.

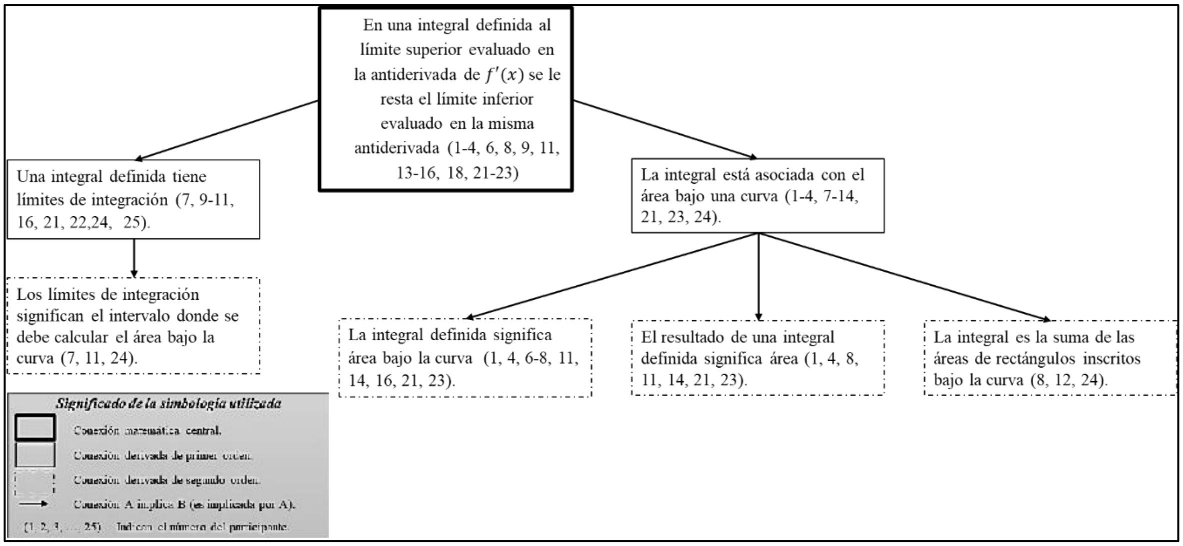


Figura 37. Sistema de conexiones matemáticas en torno a la segunda parte del TFC.

La figura 37 indica lo siguiente:

1. La conexión matemática central es “en una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada*”* porque esta es la que hace referencia a la segunda parte del TFC, es decir, al cálculo de área bajo una función en un intervalo cerrado.
2. La conexión matemática central permite que los estudiantes establezcan dos conexiones derivadas de primer orden: “la integral está asociada con el área bajo una curva” y “una integral definida tiene límites de integración”. La primera, es en esencia uno de los significados que los estudiantes han construido sobre la integral. Mientras que la segunda, está relacionada con los elementos que constituyen a una integral definida de la forma $\int_a^b f(x)dx$, a saber, los límites de integración.
3. La conexión matemática “la integral está asociada con el área bajo una curva” es derivada de primer orden y está referida al plano conceptual. Es decir, los estudiantes en este caso hacen referencia al significado que ellos han construido para el concepto integral y no al símbolo o a su representación algebraica (como en caso de las conexiones derivadas de segundo orden). Deriva de la conexión central porque en última instancia el TFC alude a una integral. Por tanto, la integral (indefinida) en sí mismo significa área, pero los límites de integración son $\infty \leq x \leq \infty$ y el resultado

es una función que permite obtener el área bajo una función $f(x)$ [función integrando].

4. A partir de la conexión matemática "la integral está asociada con el área bajo una curva" se obtienen otras que hacen referencia a conceptos más específicos como el significado particular de la integra definida, el significado del resultado de esta última y el área bajo una curva visto como una suma de áreas de rectángulos inscritos bajo una curva $f(x)$. Por ejemplo, la conexión matemática "el resultado de una integral definida significa área" es una conexión derivada de segundo orden.
5. Finalmente, a partir de la conexión matemática central se deriva aquella que relaciona a $\int_a^b f(x)dx$ con una de sus características, a saber, que tiene límites de integración. Por tanto, esta conexión matemática es derivada de la conexión matemática central, pero también posibilita la emergencia de "los límites de integración significan el intervalo donde se debe calcular el área bajo la curva" (conexión derivada de segundo orden).

En las producciones de los estudiantes emergieron otras conexiones matemáticas que no se asocian directamente a la derivada o a la integral, sin embargo, son fundamentales para comprender otras relaciones entre las conexiones matemáticas que hacen durante la entrevista. Estas conexiones matemáticas se asocian con el concepto de función y son descritas enseguida.

1. Una función es una regla de correspondencia donde a cada valor de x, y toma un único valor

Esta conexión matemática se identificó en las producciones de 15 estudiantes (60%), quienes la hacen de manera explícita en sus argumentos verbales o de manera implícita en sus producciones escritas, en particular cuando construyen la gráfica de la función derivada o antiderivada. Esta conexión matemática es producto de la enseñanza formal que reciben sobre el significado del concepto función, es decir, ellos asumen (porque así fueron instruidos) de que una función es una regla de correspondencia donde a cada valor de x ($x \in D_f$) existe un único valor en y (pertenece al conjunto imagen de la función) que es resultado de procesar a x en una regla de correspondencia $f(x)$. De esta forma, asumen que una función $f(x)$ es una fórmula que transforma valores del dominio para obtener valores del conjunto imagen y declaran la unicidad de los resultados que se obtienen en y al evaluar los valores que pertenecen al dominio de la función (ver extracto de E7).

> Entrevistador: […] ahí puedes ver una expresión $f(x)$ igual a algo (se le muestra la expresión $f(x) = 3x^2$), para ti ¿qué representa esa expresión y cuáles son los elementos que la componen?
>
> E7: Es una función f es igual a y, se supone que el valor que le agregues a x te va a dar un valor en y. Es una relación, una función, y puede ser tanto derivada, integrada o ponerle un valor y crear una gráfica.

En la respuesta de E7 se aprecia con claridad el sentido que él le asigna al concepto función, además de que lo relaciona con operaciones que puede efectuar con esta, tal como derivar e integrar, asimismo reconoce que ese objeto puede ser representado de manera gráfica. Esto último es de gran valía para los estudiantes cuando construyen representaciones gráficas de la función derivada y de la antiderivada.

2. Una función de la forma $f(x) = ax^n$ tiene un coeficiente, una literal y un exponente

Esta conexión matemática está asociado a la expresión $f(x) = 3x^2$ con sus componentes. Así, quienes la declaran reconocen los elementos que constituyen o son parte de la función que se les proporciona (ver extracto de la entrevista a E5). Se identificó en las producciones de 12 estudiantes.

> Entrevistador: […]Ahí puedes ver una expresión $f(x)$ igual a algo (se le señala la función $f(x) = 3x^2$), para ti, ¿qué representa esa expresión y cuáles son los elementos que la componen?
>
> E5: pues, para mi representa una función y, los elementos que la componen, veo el coeficiente, la letra o literal y pues el exponente.

Estas dos conexiones matemáticas y en particular la primera, permite identificar otro sistema de conexiones matemáticas, aunque no esté asociado directamente al TFC. En ese sentido, aquellas que no están relacionadas directamente con la derivada ni con la integral, se organizan en torno a otro concepto fundamental para comprender a ambas, es decir, al concepto función. Este concepto resulta importante ser comprendido cuando se desea realizar otras representaciones auxiliares que permitan tener una visión más general respecto de lo que significa, así como el uso que puede tener, tales como la tabular (tabla de valores) y la gráfica (representación gráfica), entre otras. Por ello, en este sistema de conexiones matemáticas la conexión matemática central es "una función es una regla de correspondencia donde a cada valor de x, y toma un único valor" en torno a la cual se organizan otras conexiones matemáticas (Figura 38).

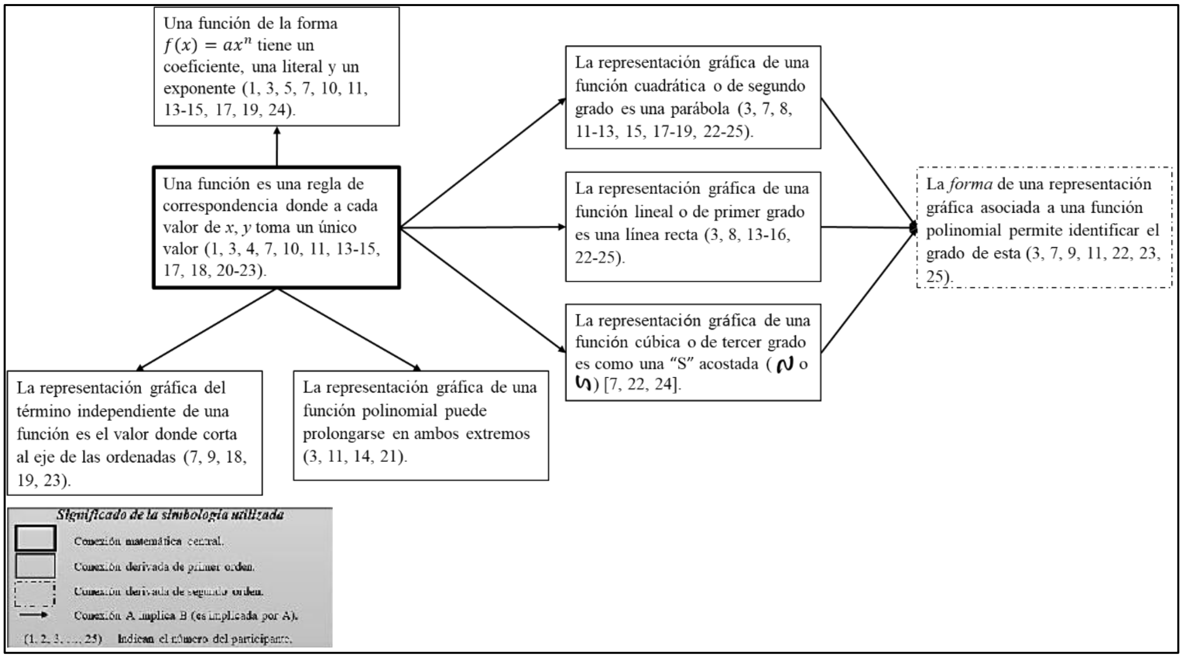
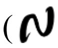


Figura 38. Sistema de conexiones matemáticas asociadas al concepto función.

Una vez que los estudiantes definen lo que para ellos es una función están en condiciones de identificar los elementos que constituyen a una función polinomial, en particular el exponente y su consecuente representación gráfica según su grado, otros elementos como el coeficiente y la literal o variable que forman parte de su representación algebraica, el significado gráfico del término independiente y la forma que tienen las gráficas en sus extremos, es decir, su prolongación. En particular, a partir de la figura 38 se puede plantear lo siguiente:

1. A partir de la conexión matemática central se derivan seis conexiones matemáticas (derivadas de primer orden). Por ejemplo, "una función de la forma $f(x) = ax^n$ tiene un coeficiente, una literal y un exponente" y "la representación gráfica de una función cuadrática o de segundo grado es una parábola", entre otras. Estas conexiones derivadas de primer orden hacen referencia a los elementos que constituyen una

función polinomial particular, las representaciones gráficas que tienen las funciones polinomiales de grado 1, 2 y 3, así como el significado gráfico de una constante o término independiente en una función polinomial y, finalmente, a la generalidad respecto a las representaciones gráfica de estas funciones. Es decir, que cuando se hace un esbozo de una función polinomial en realidad sólo se hace una representación de una porción de ella, pero al tener dominio en el conjunto de los números reales siempre existe su correspondiente representación gráfica en el eje de las ordenadas.

2. Las conexiones matemáticas: "la representación gráfica de una función cuadrática o de segundo grado es una parábola", "la representación gráfica de una función lineal o de primer grado es una línea recta" y "la representación gráfica de una función cúbica o de tercer grado es como una "S" acostada ( o )" [conexiones derivadas de primer orden] posibilitan que los estudiantes establezcan la conexión matemática "la *forma* de una representación gráfica asociada a una función polinomial permite identificar el grado de esta" (conexión derivada de segundo orden).
3. Finalmente, el sistema de conexiones matemáticas formada en torno al concepto función es de suma importancia en tareas gráficas y algebraicas, porque permite a los estudiantes interpretar gráficas que modelan fenómenos específicos o bien, les son de ayuda en la construcción de gráficas de las funciones derivadas y antiderivadas. Asimismo, resulta fundamental como conocimiento previo para establecer los sistemas de conexiones matemáticas representados en las figuras 36 y 37.

En resumen, los resultados indican que en torno a conceptos matemáticos específicos (por ejemplo, en relación con el concepto función y al TFC en este estudio) existe un sistema de conexiones matemáticas que organiza el conocimiento del estudiante en relación a ellos. La complejidad de cada sistema indicará el nivel de comprensión que los estudiantes han logrado. Mientras más complejo sea este sistema el estudiante estará en mejores condiciones de resolver las tareas propuestas obteniendo resultados consistentes desde el punto de vista de las matemáticas. Asimismo, sistema de conexiones matemáticas previos serán de suma utilidad para lograr otros sistemas organizados en torno a conceptos matemáticos más avanzados.

4.4 Resultados P3: concepciones alternativas

En relación con la tercera pregunta de investigación, el análisis temático permitió identificar en las producciones escritas y verbales de los 25 participantes 9 concepciones alternativas que se resumen en la tabla 14. En la tabla 14, $p(t)$ modela la población total de cierta especie de animales.

Tabla 14. Concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral.

Concepciones alternativas	Frecuencia
1. La derivada de la integral de una función polinomial (o viceversa) se obtiene calculando la derivada y la integral por separado, ignorando el sentido reversible de ellas.	20
2. La velocidad instantánea a la que se desplaza un objeto se obtiene mediante la fórmula $v = d/t$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo).	14
3. El resultado de $f´(a)$ sólo significa un valor para *y* cuando *x* vale a.	10
4. En $f(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función.	10
5. Al resultado de calcular una derivada se le debe agregar dx que representa su carácter de derivada.	5
6. $f'(a)$ significa un punto por donde pasa la recta tangente a una curva.	3
7. $p'(a) = k$ significa que la población de animales tardó en crecer *k* años.	2
8. $p'(a) = k$ significa que la velocidad de crecimiento por año es *k* animales.	2
9. La derivada interpretada en una gráfica, es la recta tangente que toca a la curva en un punto máximo.	1
Total	67

Estas concepciones alternativas son descritas enseguida.

1. La derivada de la integral de una función polinomial (o viceversa) se obtiene calculando la derivada y la integral por separado, ignorando el sentido reversible de ellas.

Esta concepción alternativa aparece en la producción de 20 estudiantes cuando calcularon $\frac{d}{dx}[\int 3x^2\,dx]$ y $\int \left[\frac{d}{dx}(3x^2)\right] dx$. Ellos efectuaron las operaciones en el orden siguiente: primero la operación indicada entre paréntesis. ya sea la derivada o la integral y, posteriormente, aquella indicada entre corchetes. Esta concepción alternativa seguramente está influenciada por los procedimientos aprendidos por los estudiantes en sus cursos tempranos de Aritmética y Algebra, en particular cuando fueron instruidos sobre cómo efectuar múltiples operaciones con signos de agrupación. En estos cursos se les enseñó que debían efectuar las operaciones en orden de jerarquía: primero las que están dentro de los paréntesis, luego las indicadas entre corchetes y, finalmente, las operaciones que aparecen dentro de las llaves, si es que existen. Además, de que primero se efectúan las divisiones y multiplicaciones y, finalmente, las sumas y restas.

Sin embargo, es significativo que 9 de los 20 estudiantes que ofrecen como respuesta $\int \left[\frac{d}{dx}(3x^2)\right] dx = \ 3x^2 + C$ (Figura 39), una vez que hacen una visión retrospectiva de sus resultados y procedimiento establecen la conexión matemática "la integral de la derivada de una función polinomial es la misma función". Esto significa que en este grupo de estudiantes la concepción alternativa permanece a un nivel débil en su sistema de creencias, por lo que es susceptible de cambio. No obstante, en el resto de los estudiantes la idea del TFC parece estar ausente, puesto que en caso contrario ellos hubieran declarado que $\int \left[\frac{d}{dx}(f(x))\right] dx = f(x)$ por el TFC, dado que $f(x)$ era una función polinomial continua en cualquier intervalo $[a, b]$. En otras palabras, si estos estudiantes comprendieran al TFC se habrían dado cuenta de la reversibilidad entre la derivada y la integral y, por lo tanto, el resultado sería la función original a la cual se les pidió encontrar la integral de su derivada.

Esta concepción alternativa igualmente indica que para los estudiantes podría ser cierta la desigualdad: $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] \neq \int \left[\frac{d}{dx} f(x)\right] dx$ y la diferencia radica en la presencia o no de la constante de integración C en sus resultados (ver extracto de la entrevista de E11).

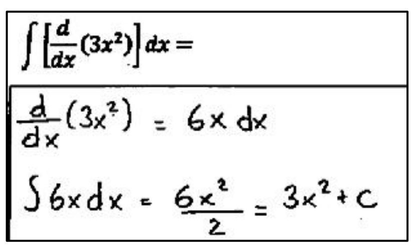


Figura 39. Respuesta de E10 al calcular la integral de la derivada de una función polinomial.

Entrevistador: ¿consideras que esta última operación (se le señala a $\int \left[\frac{d}{dx}(3x^2)\right] dx$) que resolviste es diferente o igual a la que resolviste anteriormente (se le señala a $\frac{d}{dx}\left[\int (3x^2)\ dx\right]$)?

E11: es diferente. En las dos operaciones hay integrales y derivadas, pero en una, primero tienes que hacer una operación para después hacer la otra. En la segunda, al momento de derivar te da un valor exacto, *pero al momento de integrar te sale una constante*, o sea, que tal vez el valor no es exacto y por eso se le agrega.

La misma concepción alternativa se manifiesta cuando se les proporciona a los estudiantes una función polinomial y se les pide calcular primero la derivada y, posteriormente la integral de la nueva función. Ellos no se dan cuenta que pueden utilizar el TFC y obtener como resultado la misma función original, además declaran que entre la función original y la que obtienen después de derivar e integrar existe una diferencia, la constante de integración.

Por otra parte, un grupo de 11 estudiantes que inicialmente muestran como respuesta que el cálculo $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx]$ se hace por separado, cambian su concepción inicial y hacen la conexión matemática "la derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función" una vez que hacen una visión retrospectiva de sus resultados y procedimientos (posibilitado por las Entrevistas Basadas en Tareas). Es decir, una vez que reflexionan sobre sus producciones cambian de opinión y finalmente, reconocen que la diferenciación y la integran son procesos inversos, por lo tanto, el resultado es la misma función a la cual se les pide encontrar la derivada de su integral.

Este cambio en la concepción y en las respuestas de los estudiantes indica que las Entrevistas Basadas en Tareas es un buen método para propiciar el cambio conceptual en algunos temas de Cálculo, siempre que el grupo sea reducido y los estudiantes asuman una actitud crítica y reflexiva. Esto demanda en los profesores una mayor comprensión de los conceptos matemáticos para posibilitar el cambio conceptual en los estudiantes, y consecuentemente puedan ayudarles a desarrollar la habilidad de hacer conexiones intramatemáticas y extramatemáticas.

2. La velocidad instantánea a la que se desplaza un objeto se obtiene mediante la fórmula $v = d/t$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo).

Esta concepción alternativa es formada en los estudiantes desde la educación básica cuando en Física se les enseña a calcular la velocidad promedio utilizando para ello la fórmula $v = d/t$. Como datos son necesarios la distancia total que recorre un móvil o una persona y el tiempo total que le toma cubrir esa distancia o, bien tener la distancia final e inicial, así como el tiempo final e inicial en que el movimiento tiene lugar. Sin embargo, cuando se calcula la velocidad instantánea es necesario usar la idea de límite y en particular el concepto de derivada.

Esta concepción alternativa se manifestó en 14 estudiantes cuando se les pidió calcular la velocidad de una piedra en cualquier instante x, donde la posición o trayectoria (dada en metros sobre segundo) que sigue la piedra estaba dada en una gráfica. A los estudiantes se les pidió encontrar una representación algebraica que permitiera encontrar la velocidad en cualquier instante y posteriormente, calcular la velocidad en el instante $t = 2$ segundos. Sin embargo, cuando utilizan la fórmula $v = d/t$ para realizar la tarea que se les propuso, los lleva a decir que la velocidad en $t = 2$ es 10 m/s (Figura 40) y la velocidad que lleva la piedra cuando alcanza la altura máxima es distinta de cero, resultados evidentemente inconsistente desde el punto de vista de las matemáticas.

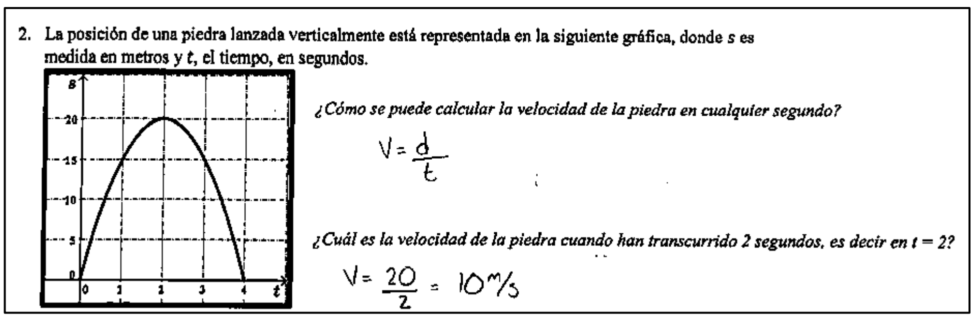


Figura 40. Uso de la fórmula $v = d/t$ para calcular la velocidad instantánea por E10.

Sin embargo, similar a la concepción alternativa anterior, 6 de los 14 estudiantes en los que apareció después de reflexionar sobre sus resultados y reconsiderar elementos que formaban parte de su sistema de creencias pudieron cambiar su concepción inicial y finalmente hicieron la conexión matemática “la derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración”. No obstante, en los 8 restantes la concepción alternativa permaneció.

3. El resultado de $f'(a)$ sólo significa un valor para y cuando x vale a

Esta concepción alternativa se ve favorecida porque los estudiantes entienden a la función sólo como una regla de correspondencia, donde a cada valor de x le corresponde un único valor para y a través de la regla de la regla de correspondencia $f(x)$. Sin embargo, este significado puede ser ampliado al registro gráfico como la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$. No obstante, 10 estudiantes asumen que $f'(a)$ sólo significa un valor para y cuando x vale a y, consecuentemente, en la gráfica sólo representa un punto (ver extracto de la entrevista a E13), es decir para ellos $f'(a) = f(a)$.

> Entrevistador: ¿podrías evaluar en la derivada para $x = 1$ (se le señala la función derivada $f'(x) = 6x$ que el estudiante obtuvo previamente)?
>
> E13: (hace el cálculo correspondiente).
>
> Entrevistador: ¿qué significa ese resultado?
>
> E13: que para cuando x tiene un valor de 1, el valor que va a tener y va a ser 6 y su coordenada va a ser uno coma seis (el estudiante escribe $(1{,}6)$).
>
> Entrevistador: ¿digamos que gráficamente por ahí va a pasar?
>
> E13: va a ser uno de los puntos donde pase la recta.

La última respuesta de E13 confirma que él asume que al evaluar valores específicos de x en la función derivada se obtiene la gráfica de la función $f(x)$. Esta concepción alternativa provoca entonces que, además, los estudiantes consideren que la representación gráfica de $f(x)$ es la misma que la representación gráfica de $f'(x)$.

4. En $f(x) = 3x^3$, $f(x)$ por sí sola significa función

Los 10 estudiantes que manifiestan esta concepción alternativa asocian a la letra "f" acompañada de una "x" entre paréntesis con el concepto de función. Es probable que la letra *f* tomada de la palabra *función* genere en ellos esa idea, pero también es posible que se manifieste porque los estudiantes utilizan sus conocimientos de Álgebra para darle sentido o significado a las literales presentes en la simbología algebraica de algunos conceptos, en este caso, en el de función. Esta concepción alternativa podría obstaculizar la comprensión del significado del concepto función. Por ejemplo, para E6 si en lugar de $f(x)$ se escribiera y igualada a la expresión algebraica colocada después del signo igual, entonces significaría ecuación de segundo grado (ver extracto de la entrevista a E6).

> Entrevistador: Aquí tú puedes ver una expresión $f(x)$ (se le señala la expresión $f(x) = 3x^2$). ¿Para ti qué representa esa expresión y qué elementos la componen?
>
> E6: la componen la función, el signo de igual que me dice que es una igualdad, una incógnita elevada al cuadrado.
>
> Entrevistador: ¿Cómo sabes que es función?

E6: porque tiene la f y entre paréntesis tiene la x.

Entrevistador: si en lugar de $f(x)$ tuviera nada más y igual a tres equis cuadradas ($y = 3x^2$) ¿Sería una función?

5. Al resultado de calcular una derivada se le agrega dx que representa su carácter de derivada

En las producciones verbales y escritas de 5 estudiantes aparece esta concepción alternativa. Ellos indican que el diferencial de x (dx) debe ser añadida al resultado del cálculo de la derivada de una función (Figura 41) y esto significaría que el resultado es producto de derivar cierta función. Esta concepción alternativa se origina de la incomprensión de estos estudiantes de la notación leibniziana para la derivada dy/dx. Esta concepción alternativa puede provocar obstáculos cuando se calcula la integral de alguna función, puesto que el significado de dx es importante al calcular integrales dobles o triples o bien, cuando la función tiene más de una variable. Incluso, puede causar dificultades al calcular derivadas parciales de cualquier orden.

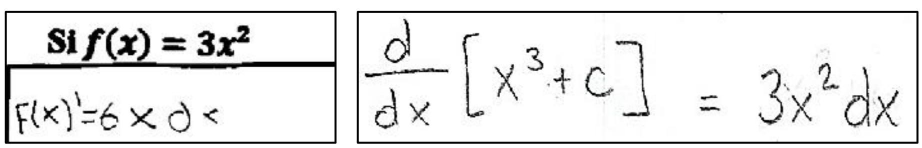


Figura 41. Los estudiantes E3 y E10 respectivamente añaden dx al resultado de su derivada.

6. $f'(a)$ significa un punto por donde pasa la recta tangente a una curva

Esta concepción alternativa aparece en las producciones verbales de 3 estudiantes y es la más cercana al significado correcto de $f'(a)$, pero también es muy cercana a la concepción alternativa 3 antes descrita. Si bien estos tres estudiantes reconocen que $f'(a)$ tiene relación con la recta tangente, la concepción es inconsistente con su significado como la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$, puesto que la idea de los estudiantes donde aparece esta concepción alternativa está asociada más al punto de tangencia (ver extracto de la entrevista a E11).

Entrevistador: ¿Podrías calcular la derivada de $f(x) = 3x^2$ en $x = 1$?

E11: sí (hace las operaciones). Sólo quedaría seis.

Entrevistador: ¿qué significa ese resultado?

E11: […] sería el punto de intercepción o por donde pasa la recta tangente.

Esta concepción alternativa puede tener su origen en el hecho de que los estudiantes asumen que la recta tangente a una curva se compone de puntos, por lo que $f'(a)$ significaría un punto de tangencia entre la recta tangente y la curva dada. Por otra parte, esta concepción alternativa puede provocar obstáculos para comprender el significado real de $f'(a)$, además de $f''(a)$ y concepciones asociadas.

7. *$p'(a) = k$ significa que la población tardó en crecer k años*

Esta concepción alternativa emerge en la resolución de problemas que involucran conceptos de la biología. Como datos se proporcionó al estudiante la función $p(t) = 2t^3 - t^2 + 100$ que modelaba la población total de una cierta especie de animales, donde t era el tiempo en años, y se pedía encontrar la velocidad de crecimiento en $t = 2$, es decir, $p'(2)$. Los estudiantes cuando encontraron ese resultado, explicaron que $p'(2) = 20$ significa que la población de animales tardó 20 años en crecer (ver extracto de la entrevista a E20). Su centro de atención parece ser el tiempo t y asocian su resultado con ese dato, sin considerar que se les pidió explícitamente la velocidad de crecimiento en un instante. Ellos parecen razonar que, dado que t significa tiempo, entonces al sustituir su valor por 2, el resultado debe estar expresado en años porque se les dijo que el tiempo en el problema estaba dado en años.

Entrevistador: para ti ¿Qué significa este resultado (se le indica el resultado de la derivada valuada en $t = 2$, es decir, $p'(2) = 20$)?

E20: qué tardan en crecer 20 años.

Entrevistador: ¿me puedes explicar con mayor precisión lo que me estás diciendo?

E20: Porque t es tiempo y se mide en años, se sustituye, sería dos años, dos años al cuadrado sería cuatro. Luego, cuatro por seis sería veinticuatro años, menos dos por dos sería cuatro años, y ya da veinte años.

Entrevistador: Pero ¿ese resultado qué significa en términos del fenómeno?

E20: que la especie crece en 20 años.

La concepción alternativa expresada por E20 puede desencadenar en la *explicación* errónea de futuros resultados que obtenga al resolver problemas de aplicación. Por ejemplo, a partir de su producción escrita se observa que él obtiene primeramente la derivada de la función

$p(t)$ y calcula correctamente $p'(2)$, pero no asocia el significado apropiado a su resultado por lo que aparece una concepción alternativa.

8. $p'(a) = k$ significa que la velocidad de crecimiento por año es k

Esta concepción alternativa aparece cuando los estudiantes resuelven el mismo problema descrito anteriormente. Sin embargo, a diferencia del anterior, dos estudiantes que manifiestan esta concepción creen que su resultado de $p'(2) = 20$ significa que la población de animales crece a una velocidad de 20 animales por cada año (ver extracto de la entrevista a E4). Este resultado, similar al anterior, guarda estrecha relación con el significado asociado a t como tiempo, pero además con la concepción que ellos tienen sobre la velocidad promedio. La respuesta de los estudiantes implica que para ellos al transcurrir un año hay 20 animales, en dos años habrá 40, en tres años 60, y así sucesivamente. Esta concepción alternativa, producto del sentido que ellos le asignan a la velocidad promedio, limita su comprensión del significado de velocidad instantánea en el fenómeno descrito en el texto del problema.

> Entrevistador: ¿puedes responder la siguiente pregunta (se le indica la pregunta donde se pide evaluar $t = 2$ en la función $p'(t) = 6t^2 - 2t$ que previamente obtuvo E4)?
>
> E4: sí (lee la pregunta y luego sustituye el valor de $t = 2$ en la derivada que obtuvo previamente). Mmm es 20.
>
> Entrevistador: ¿ese veinte qué significado tiene para el problema planteado?
>
> E4: que la velocidad de crecimiento de la población va a ser 20 en cada año.

Las concepciones alternativas 7 y 8 ilustran perfectamente la importancia de identificar las concepciones alternativas en las producciones tanto verbales como escritas de los estudiantes, dado que no basta enfocarse sólo en sus resultados matemáticos que, para estos casos, evidentemente son correctos, pero el significado que ellos asocian a su resultado es inconsistente con lo que se acepta en Matemáticas. Similares concepciones alternativas pueden ser detectadas cuando se resuelven otros problemas de aplicación y se les pide a los estudiantes interpretar sus resultados.

9. La derivada interpretada en una gráfica, es la recta tangente que toca a la curva en un punto máximo

Dado que los estudiantes asocian el concepto tangente con la derivada; entonces, en algún momento esto desencadena en una concepción alternativa. Es decir, consideran que la derivada de una función dada gráficamente es una recta que debe tocarla en un punto máximo. Por ejemplo, cuando a E12 se le da la gráfica de una función polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ y se le pide el trazo de su derivada, lo primero que hace es esbozar una recta tangente que toca a $f(x)$ en el máximo de esta función (Figura 42). En un primer momento, E12 asume que esa recta representa la función derivada solicitada, aunque después motivado por las preguntas auxiliares del entrevistador rectifica y traza una gráfica aceptable de $f'(x)$.

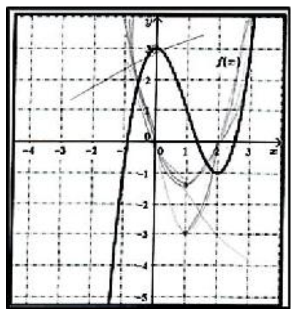


Figura 42. Esbozo realizado por E12.

Capítulo 5

Discusión y conclusión

5.1 Las conexiones matemáticas en las tareas de Cálculo

Los resultados presentados previamente indican que las conexiones matemáticas que los estudiantes hicieron fueron de distintas tipologías y estaban asociadas a diferentes conceptos matemáticos, pero en su conjunto posibilitan que logren cierta comprensión del TFC en función de la frecuencia de cada conexión matemática que cada estudiante hizo, aunque no todos los participantes parecen lograrlo. En este último grupo aparecen las concepciones alternativas que en determinados casos obstaculizan la comprensión de ciertos contenidos matemáticos o extramatemáticos.

La derivada y la integral como operaciones inversas implica que para una función polinomial $f(x)$ se cumple que, $\frac{d}{dx}[\int(x)dx] = f(x)$, $\int \frac{d}{dx}(f(x))dx = f(x)$ y, por lo tanto, $\frac{d}{dx}[\int(x)dx] = \int \frac{d}{dx}(f(x))dx$, ya que las funciones polinomiales cumple las condiciones establecidas en el TFC. Sin embargo, pese a que 22 estudiantes hacen la conexión matemática "la derivada y la integral son operaciones inversas" y que incluso reconocen esa relación en el contexto físico, sólo 15 aceptan que $\frac{d}{dx}[\int(x)dx] = f(x)$ y 12 admiten que $\int \frac{d}{dx}(f(x))dx = f(x)$. De esto se desprenden las siguientes reflexiones:

- Inicialmente 5 estudiantes al calcular $\frac{d}{dx}[\int(x)dx]$ cancelan los operadores derivada e integral obteniendo de manera inmediata que la solución es la misma función original. En contraparte, 4 estudiantes hacen lo mismo cuando calculan $\int \frac{d}{dx}(f(x))dx$.
- Por lo tanto, el resto de los estudiantes aceptan que $\frac{d}{dx}[\int(x)dx] = \int \frac{d}{dx}(f(x))dx$ es cierto una vez que reflexionan sobre el procedimiento que hicieron para realizar esos cálculos ($\frac{d}{dx}[\int(x)dx]$ y $\int \frac{d}{dx}(f(x))dx$) y sobre sus resultados mismos. Esto posibilitó que establecieran la conexión matemática "la derivada y la integral son operaciones inversas".
- Otra lectura de esos resultados es que los estudiantes han desarrollado fuertemente la creencia de que "las matemáticas significan hacer cálculos algorítmicos guiados por fórmulas que determinan la forma correcta de encontrar el resultado" que ha sido formada en ellos por la práctica del profesor de matemáticas. Esto trae como consecuencia que, incluso, cuando los estudiantes hacen la conexión matemática "la derivada y la integral son operaciones inversas" y que saben que esto implica que, al hacer un cálculo de derivada e integral simultáneamente, se obtiene como resultado la función original; sin embargo, siguen calculando la derivada por un lado y la integral por el otro, para así finalmente probar que $\frac{d}{dx}[\int(x)dx] = \int \frac{d}{dx}(f(x))dx$.

Los resultados son consistentes con lo reportado por Haciomeroglu (2007), Dawkins & Mendoza (2014) y Hong & Thomas (2015) en el sentido de que hay persistencia en el uso del símbolo algebraico, en particular para esbozar la gráfica de la derivada y de la antiderivada (Haciomeroglu, 2007; McGee & Martinez-Planell, 2014; Ariza, Llinares & Valls, 2015). Esto también se refuerza por la frecuencia con la que los estudiantes hicieron las conexiones matemáticas de tipo procedimental (ver Tabla 1 en la sección de resultados). En ese sentido, las conexiones matemáticas entre representaciones en algunos alumnos están en un nivel débil y superficial, consistente con los resultados de Mhlolo (2012) y por Mhlolo et al. (2012).

En las tareas algebraicas, por ejemplo, cuando a los estudiantes se les pidió esbozar la gráfica de $f'(x)$ dada la gráfica de $f(x)$ y viceversa, dada la gráfica de $f'(x)$ graficar $f(x)$

los estudiantes demandaron como dato las representaciones algebraicas de las gráficas proporcionada. Esto los llevó a utilizar la fórmula $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ para esbozar a $f'(x)$ y a utilizar $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ en la segunda actividad. Es decir, los estudiantes no fueron capaces trazar el gráfico solicitado sin su representación algebraica (Figura 6) y, por lo tanto, no pudieron usar las representaciones equivalentes (gráfico-gráfico) en el sentido de Businskas (2008).

Los resultados previos son consistentes con la literatura que explora la comprensión gráfica de la derivada de los estudiantes de Cálculo como Baker, Cooley & Trigueros (2000) o Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997). Si bien los estudiantes no hacen el tránsito de una representación gráfica a una algebraica, sí logran el proceso inverso. Esto indica que presentan dificultades en el uso de información gráfica para dar sentido a la representación algebraica (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Ubuz, 2007; Cuesta, Deulofeu & Méndez, 2010; Bajracharya 2014; Dolores y García-García, 2017) cuando está ausente la representación algebraica. En este caso, utilizaron las representaciones alternas (Businskas, 2008) como: representación algebraica-representación numérica, representación numérica-representación tabular, representación tabular-representación gráfica (Figura 43) para completar ambas tareas. No obstante, algunos estudiantes tienen dificultades para usar los registros de representación consistente con lo reportado por Moon et al. (2013).

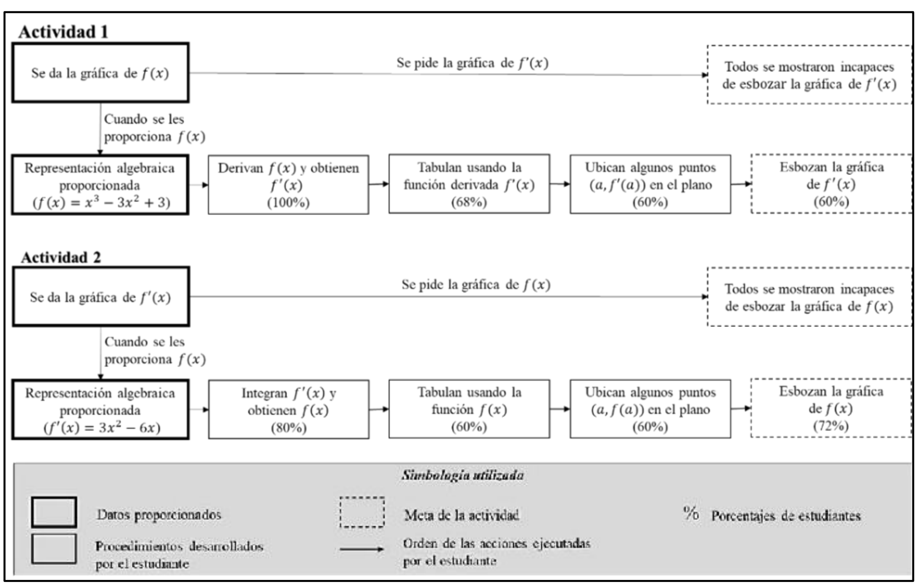


Figura 43. Acciones desarrolladas por los estudiantes para resolver las tareas gráficas 1 y 2.

En oposición a Aspinwall & Shaw (2002), en esta investigación los participantes no parecen construir representaciones personales o idiosincrásicas diversas que pudieran ayudarlos a entender la relación entre la derivada y la integral de una mejor manera. Además, los participantes parecen haber sido enseñados de una forma lineal y predeterminada, en contraste con lo que reporta David & Tomaz (2012). Es decir, en México son los profesores quienes asumen la dirección del proceso enseñanza-aprendizaje. Esto conlleva a que los alumnos sean instruidos a hacer construcciones gráficas a partir una expresión algebraica y no desarrollan la habilidad de trabajar entre representaciones gráficas. Esto justificaría que los alumnos procedieran de manera similar en sus producciones escritas. Por otra parte, los resultados indican un mayor éxito en la resolución, en ese orden, de tareas algebraicas, gráficas y en la resolución de problemas, es decir, las limitaciones de los estudiantes para hacer conexiones matemáticas se agravan en el contexto de la resolución de problemas, resultado consistente con lo reportado por Özgen (2013a).

Los resultados obtenidos en el presente estudio también son consistentes con los encontrados por Lockwood (2011) en el sentido de que los estudiantes también hacen conexiones matemáticas inesperadas. Por ejemplo, durante la entrevista se observó que los estudiantes utilizaban con mucha naturalidad la conexión matemática de reversibilidad éntrelos conceptos como: posición-velocidad y velocidad-aceleración asociadas a las ideas de derivada e integral en el contexto físico; esa conexión les permitió resolver problemas y hacer conexiones matemáticas que evocaban conceptos biológicos. Por tanto, son conexiones extramatemáticas inesperadas que fueron posibilitadas porque los estudiantes extrapolaron sus conocimientos de Cálculo y Física al campo de la Biología, donde el término “velocidad” fue un mediador para lograr esos resultados.

Por otra parte, conexiones matemáticas como “la derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno”, “la *forma* de una representación gráfica asociada a una función polinomial permite identificar el grado de esta” y “el resultado de $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en $t = a$” también son inesperadas (en el sentido de Lockwood, 2011), en el sentido de que no fueron previstas como posibles conexiones matemáticas hechas por los estudiantes cuando resolvieran las tareas propuestas.

Estos resultados indican que es importante cuando se estudian conexiones matemáticas identificar cómo el estudiante lo declara en sus argumentos verbales o gestuales y de qué manera son utilizadas en sus producciones escritas. De otra forma, enfocarse en los cálculos que desarrollan puede generar la perspectiva de que las conexiones matemáticas son hechas por los estudiantes o que, en su defecto, como la declaran en sus argumentos verbales o gestuales entonces pueden utilizarlas en el momento de resolver tareas concretas, aunque no sea así. Pero, si las declaran en sus argumentos y las utilizan en sus cálculos, entonces se puede inferir que los estudiantes algo han comprendido y que ese conocimiento puede ser incorporado a su sistema de creencias. Los profesores en servicio deben poner énfasis en estos aspectos para rescatar las conexiones matemáticas inesperadas que puedan ser útiles para comprender conceptos matemáticos más avanzados y aprovechar las conexiones matemáticas que han sido construidas por los estudiantes por su propia cuenta.

Finalmente, es importante que en situación escolar los profesores de matemáticas motiven a los alumnos a reflexionar sobre sus resultados, es decir, hacer una visión retrospectiva de sus procedimientos y resultados. Esto posibilita que hagan nuevas conexiones matemáticas o validen con sus resultados algunas que hacen previamente pero no utilizan por seguir lo que dicta la costumbre escolar, es decir, realizar cálculos algorítmicos con un orden predeterminado.

5.1.1 Los sistemas de conexiones matemáticas

Las conexiones matemáticas que hicieron los estudiantes estaban fuertemente relacionadas formando un sistema de conexiones matemáticas como se presentó en la sección de resultados. Hay unas conexiones matemáticas centrales y, hay otras que son conexiones derivadas de primer y segundo orden. Estos sistemas de conexiones se organizan en torno a conceptos matemáticos específicos y que implican un nivel de jerarquización y abstracción superior a otros que son incluidos en estos. Por ejemplo, en relación con el sistema de conexiones asociados al TFC están presente conceptos previos como: derivada, integral, derivada puntual, integral indefinida y definida, constante de integración, diferencial, posición, velocidad, aceleración, entre otros. Mientras que para el sistema de conexiones asociado al concepto de función estaban presentes conceptos como: elementos de una función (coeficiente, variable y exponente), representaciones para una función (algebraica, numérica, gráfica, pictórica), grados de una función, operaciones con funciones, etc.

Estos sistemas de conexiones matemáticas ayudan a organizar las concepciones que los estudiantes tienen sobre diferentes conceptos y guían el proceso siguen al resolver las tareas propuestas. Por ejemplo, en el primer sistema de conexiones matemáticas (ver Figura 36 en la sección de resultados) la conexión central fue "la derivada y la integral son operaciones inversas". Esto les permitió resolver con éxito las tareas de derivadas y de integrales, resultados opuestos a los reportados por Radmehr & Drake (2017) quienes encontraron que estudiantes universitarios tienen dificultades para resolver tareas relacionadas con el TFC. Asimismo, son opuestos a los encontrados por Rösken & Rolka (2007) quienes reportan que los estudiantes tuvieron problemas para resolver tareas de integral.

Asimismo, hacer la conexión matemática central anterior implicaría, según Wenzelburger (1993), asumir como inversos estos procesos: encontrar la posición de un objeto dada la variación de la velocidad y encontrar la velocidad conociendo la variación de la distancia recorrida, encontrar el número al cual se acerca una suma de productos $\sum f(x)\Delta x$ si $\Delta x \to 0$ y encontrar el número al cual se acerca un cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $\Delta x \to 0$ y, finalmente, calcular áreas debajo de una curva vs. calcular la pendiente de una curva. Estos procesos parecen ser reconocidos por los participantes de este estudio a excepción de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $\Delta x \to 0$ porque en sus respuestas parece que entienden la relación de reversibilidad entre conceptos como: derivada-integral, posición-velocidad, área bajo una curva-pendiente de una curva.

Por otra parte, investigaciones como Thompson (1994), Carlson et al. (2003), Sealey (2006), Thompson & Silverman (2008) y Haddad (2013) reconocen que, lo que se llama en este trabajo la conexión matemática "la integral definida significa área bajo la curva", es insuficiente para comprender la integral definida como acumulación que es central para la comprensión de la segunda parte del TFC. Sin embargo, en este trabajo los estudiantes también hicieron la conexión matemática "la integral es la suma de las áreas de los rectángulos inscritos bajo la curva" que da cuenta de la idea de integral definida como acumulación. Ambas conexiones matemáticas formaron parte del segundo sistema de conexiones matemáticas (ver Figura 37 en la sección de resultados) posibilitando la conexión matemática central: "en una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada" que, en esencia es la segunda parte del TFC.

Ambos sistemas de conexiones matemáticas (asociados a la primera y segunda parte del TFC) permiten tener una mejor comprensión de la diferenciación e integración como procesos inversos, así como resolver las tareas propuestas. En ese sentido, Garner & Garner (2001) asumen que la integral definida vista como área bajo una curva también está presente en estudiantes de nivel superior y que esta idea parece permitir una mejor comprensión sobre esa relación. Los resultados encontrados en este trabajo, en ese sentido, son consistentes con lo reportado por Dolores & García-García (2017) dado al uso que recibe el TFC para resolver las tareas propuestas. En oposición a los resultados de Haddad (2013) y Bajracharya (2014), en este estudio el sistema de conexiones matemáticas asociados al TFC de los estudiantes sí posibilita que hagan conexiones matemáticas entre conceptos como área, antiderivada, integral, sumas de Riemann y conceptos matemáticos asociados y los aplican coherentemente en la resolución de problemas de física. Incluso, esos conocimientos los ampliaron a problemas que evocaron conceptos biológicos para decidir el uso de la derivada o de la integral.

En razón de lo anterior, este estudio se adhiere a las ideas propuestas por Thompson & Dreyfus (2016) en el sentido de aceptar que incorporar el TFC como una idea central desde el primer día de clases de Cálculo en la Universidad puede ayudar a los estudiantes a conectar sus concepciones de derivadas y de integrales, donde el concepto de diferencial dy y dx serán fundamentales. En ese sentido, la conexión matemática "El diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función" desarrollada por los estudiantes en el nivel preuniversitario es significativa. Esta conexión puede ser ampliada en la universidad y desarrollar otras conexiones matemáticas asociadas al concepto de diferencial.

Ahora bien, el sistema de conexiones matemáticas asociada al concepto función (ver Figura 38 en la sección de resultados) donde la conexión matemática central es "una función es una regla de correspondencia donde a cada valor de x, y toma un único valor" es importante para comprender conceptos más avanzados como la función derivada y función antiderivada, además del TFC. Resultado similar se reporta con estudiantes de secundaria (en un 43.6%, Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007) y de economía (Cuesta et al., 2010), es decir, ellos asumen que una función es una regla de correspondencia. Los estudiantes también dieron respuestas como una función es una expresión algebraica que se le asigna un valor para hacer una gráfica (Cuesta et al., 2010), idea que también se identificó en los participantes de este estudio. Sin embargo, los estudiantes del preuniversitario de esta investigación ampliaron esa idea y dijeron que una función se podría derivar e integrar, además de poder ser graficada.

La conexión matemática “una función es una regla de correspondencia donde a cada valor de x, y toma un único valor” puede ser ampliada en el nivel superior para considerarla como una regla de correspondencia entre dos conjuntos (dominio y conjunto imagen), tal como algunos profesores y estudiantes exponen en estudios como Elia et al. (2007) y Hatisaru & Erbas (2017). Ya que sólo quedarse con la idea presente en los estudiantes que participaron en este estudio crea una comprensión incompleta respecto de lo que realmente significa ese concepto, tal como lo reportan Cuevas & Vallejo (2015). Es decir, deben desarrollar con mayor claridad la comprensión de que las funciones polinomiales están definida en $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es importante mencionar que los participantes de este estudio, si bien sólo asignaron valores enteros a la variable dependiente, en el momento de graficar parecen tener presente que el dominio y conjunto imagen de las funciones que graficaban eran los números reales, ya que sus trazos eran curvas y no líneas rectas al unir los puntos que fueron encontrando.

Finalmente, es importante mencionar que el concepto de función (presente en el tercer sistema de conexiones matemáticas identificada en este estudio) es un tema central para la comprensión en matemáticas, particularmente en Cálculo, aunque resulta difícil comprender para algunos estudiantes (Elia et al., 2007; Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed, 2012; O’Shea, Breen & Jaworski, 2016). Por ejemplo, los estudiantes suelen tener dificultades para dar una definición adecuada del concepto de función y resolver problemas sobre funciones que implican conversiones entre diferentes registros de representación (Elia et al., 2007). En ese sentido, Best & Bikner-Ahsbahs (2017) sugieren que un uso flexible de las funciones requiere construir el significado de este tanto como regla de correspondencia como covariación dentro y entre todos los tipos de representaciones posibles, y también entre diferentes funciones.

5.1.2 Las categorías de conexiones matemáticas identificadas

Los resultados identificados en este estudio indican la presencia de conexiones intramatemáticas y extramatemáticas. Resultados consistentes con los reportados en García-García & Dolores-Flores (2017a), García-García & Dolores-Flores (2017b) y en Dolores & García-García (2017). Por otra parte, los datos colectados en esta investigación permitieron construir seis categorías de conexiones matemáticas: procedimental, representaciones diferentes, característica, reversibilidad, significado y parte-todo. Algunas de estas también han sido identificadas en las producciones de profesores de matemáticas como en Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011, 2013). Estas serán discutidas enseguida.

Procedimental

Según Hiebert & Lefevre (2013), el conocimiento procedimental se compone, por un lado, del lenguaje formal, o sistema de representación de símbolos, de las matemáticas y, por otro lado, de los algoritmos, o reglas, para completar las tareas matemáticas. En ese sentido, refieren al igual que Star (2005) que las relaciones presentes en el conocimiento procedimental son principalmente secuenciales. Por su parte, Haapasalo & Kadijevich (2000) están de acuerdo con el segundo significado que le atribuyen Hiebert & Lefevre (2013) al conocimiento procedimental, pero añaden que el conocimiento procedimental incluye el conocimiento del formato y la sintaxis del sistema representativo que expresa los objetos: también resultan la utilización dinámica y exitosa de reglas, algoritmos o procedimientos particulares dentro de la(s) forma(s) de representación relevante(s).

Para Sáenz (2009), los procedimientos son un tipo de conocimiento que implica acciones paso a paso y el aprendizaje simultáneo de todos los componentes o pasos de lo que puede ser un procedimiento complejo. El conocimiento procedimental nutre específicamente las habilidades necesarias para resolver problemas. Este estudio considera que las conexiones matemáticas de tipo procedimental tienen las características prevista en la literatura previa; sin embargo, esa acepción puede ser ampliada.

En ese sentido, Businskas (2008) plantea cuando define a una conexión matemática procedimental que, A es un procedimiento usado cuando trabajamos con un objeto B. Mientras que Eli et al. (2011) refiere que implica relacionar ideas en base a un procedimiento matemático o algoritmo. El procedimiento a que se refieren no sólo incluye el uso de fórmulas, sino todo medio que sirva para llegar a un resultado. Por ejemplo, Businskas (2008) sugiere que el diagrama de árbol puede ser visto como procedimiento en probabilidad y estadística; para el caso de este estudio, una gráfica pudo de procedimiento para construir la gráfica de una función derivada o antiderivada. En un sentido más general, Eli et al. (2011) sugiere que esta conexión matemática puede incluir la descripción de los mecanismos involucrados en la ejecución de un procedimiento. La postura de Evitts (2004) es consistente con esto último, pues él refiere la importancia de vincular los procedimientos con los conceptos matemáticos, de esa manera se disminuirá la percepción de las matemáticas como regla-orientada.

Esta investigación se adhiere a la postura de Eli et al. (2011) y Evitts (2004) en el sentido de que, desarrollar en los estudiantes la habilidad de usar la conexión procedimental no sólo se debe limitar a enseñar fórmulas o algoritmos que ayuden a establecer un proceso predeterminado para llegar al resultado, sino que debe incluir la explicación de los conceptos matemáticos involucrados en este proceso, además del uso adecuado de las unidades de medida según el contexto de uso y la interpretación de los resultados (como lo sugieren los programas de estudio de Cálculo Diferencial e Integral). Esto permitiría desarrollar en los estudiantes simultáneamente otras conexiones matemáticas. En suma, la propuesta es desarrollar en los estudiantes un mayor número de conexiones matemáticas tantas como sean posibles al trabajar en una tarea matemática.

Finalmente, es preciso mencionar que esta tipología de conexiones matemática ha sido identificada en estudiantes de nivel superior (Dolores & García-García, 2017), en los libros de texto del nivel preuniversitario (García-García & Dolores, 2016), pero también es significativo que sea utilizada por los profesores de matemáticas, tal como lo reportan Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011, 2013). Esto es indicativo que los profesores y los libros de texto ayudan a los estudiantes a desarrollar la habilidad de usar esta conexión matemática, lo que justifica la presencia de ella en las producciones de los estudiantes participantes en este estudio. Por otra parte, dependerá también de los profesores, en buena medida, que los estudiantes desarrollen la habilidad de utilizar otras tipologías de conexiones matemáticas.

Representaciones diferentes

El acceso a los objetos matemáticos se hace por medio de la producción de sus representaciones semióticas (Duval, 2006a). Sin embargo, el rol que juegan no sólo es para designar objetos matemáticos o para comunicarse sino también para trabajar con y sobre los objetos matemáticos (Duval, 2006b), promueven el éxito en la resolución de problemas (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Ahluwalia, 2011) y pueden ayudar a los estudiantes a explicar o justificar un argumento (Stephen & Mourat, 2001). Por ello, utilizar múltiples representaciones de un objeto matemático y sus conexiones juega un papel clave para que los estudiantes construyan conocimiento conceptual en el aula de matemáticas (Dreher, Kuntze & Lerman, 2016). La instrucción debería incluir los modos de representación (Gagatsis & Shiakalli, 2004), dado que la interpretación y la construcción de gráficas son partes importantes del aprendizaje para entender los fundamentos conceptuales del Cálculo (Ubuz, 2007).

Las representaciones semióticas son el conjunto de producciones constituidas por signos, símbolos o diagramas que encarnan cierto objeto matemático visto de distintas maneras. Así, un mismo ente matemático puede ser representado en forma geométrica, en un lenguaje natural, mediante una expresión algebraica, de forma gráfica, tabular, etc., que constituyen las representaciones semióticas del objeto. Representaciones radicalmente diferentes del mismo objeto son permitidos en la medida que puedan hacer surgir sistemas semióticos totalmente diferentes. El pensamiento representacional de una persona entonces es "su capacidad para interpretar, construir y operar (comunicarse) efectivamente con ambas formas de representaciones, externas e internas, individualmente y dentro de las situaciones sociales (Stephen & Mourat, 2001, p. 120)"

Un aspecto clave del trabajo matemático es hacer conexiones matemáticas entre diferentes representaciones funcionales (Boaler, 2002). Barmby et al. (2009) consideran que introducir diferentes representaciones externas en el aula, además de proveer diferentes actividades dentro de las cuales los alumnos puedan razonar, sería de gran ayuda para desarrollar la comprensión. Por su parte, Koestler et al. (2013) sugieren que los estudiantes deben ser apoyados para desarrollar sus propias representaciones y desafiarlos a explicar las conexiones entre el problema y sus representaciones, así como las conexiones entre las representaciones mismas. De esta forma, las conexiones matemáticas, las representaciones semióticas y la comprensión están fuertemente ligadas.

En este estudio se reconoce la analogía, por un lado, entre el constructo “tratamiento” propuesto por Duval (2006b) en donde se utilizan transformaciones dentro de un mismo registro y las conexiones matemáticas que Businskas (2008) denomina “representaciones equivalentes” y, por otro lado, entre la “conversión” propuesta por Duval (2006b) en donde se utilizan transformaciones entre registros diferentes y las conexiones matemáticas que Businskas (2008) denomina “representaciones alternas”. Esto en razón de que para Businskas (2008) la conexión matemática de tipo representaciones diferentes puede ser alternas o equivalentes. Para ella, A es una representación alterna de B, si ambas están expresadas en dos formas diferentes (verbal-algebraica, algebraica-geométrica, etc.). En cambio, A es una representación equivalente de B cuando ambas están expresadas en dos formas diferentes, pero dentro de una misma representación. Por ejemplo, $f(x) = (x-1)^2$ y $f(x) = x^2 - 2x - 1$ son representaciones equivalentes en el registro algebraico.

Por otra parte, en los Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM, 2000) y en los programas de Calculo Diferencial (DGB, 2013a) y Cálculo Integral (DGB, 2013b) del preuniversitario mexicano se plantea la importancia desarrollar en los estudiantes la habilidad de utilizar la conexión matemática de tipo representaciones diferentes. En palabras de Berry & Nyman (2003), la habilidad para identificar y representar el mismo objeto utilizando diferentes representaciones es una meta en la enseñanza del Cálculo, así como en las Matemáticas en general. Esto justifica que en las producciones de los participantes de este estudio la conexión matemática de tipo representaciones diferentes haya tenido una alta frecuencia. Asimismo, el hecho de que la misma tipología de conexiones matemáticas haya sido identificada en las producciones de los profesores en estudios como Businskas (2008) y Evitts (2004) revela el papel del profesor para desarrollar en los estudiantes la habilidad de utilizar esta tipología de conexión matemática.

Finalmente, este estudio se adhiere a la postura de Patterson & Norwood (2004) en el sentido de que, dado que la representación algebraica no siempre es óptima para el aprendizaje, tiene sentido investigar representaciones alternas que puedan ser más apropiadas. Esto se evidencian en los resultados obtenidos en este trabajo, pues los estudiantes podían moverse con mayor facilidad de una representación algebraica a una gráfica, haciendo además el uso de representaciones alternas auxiliares (como la tabular, numérica, entre otras), pero no realizar el proceso inverso. Por otra parte, también se comparte en este trabajo que al mismo tiempo el uso de diferentes representaciones permite hacer conexiones matemáticas, pero también es una tipología de conexiones matemáticas; sin embargo, ambos contribuyen al logro de la comprensión matemática (Figura 44).

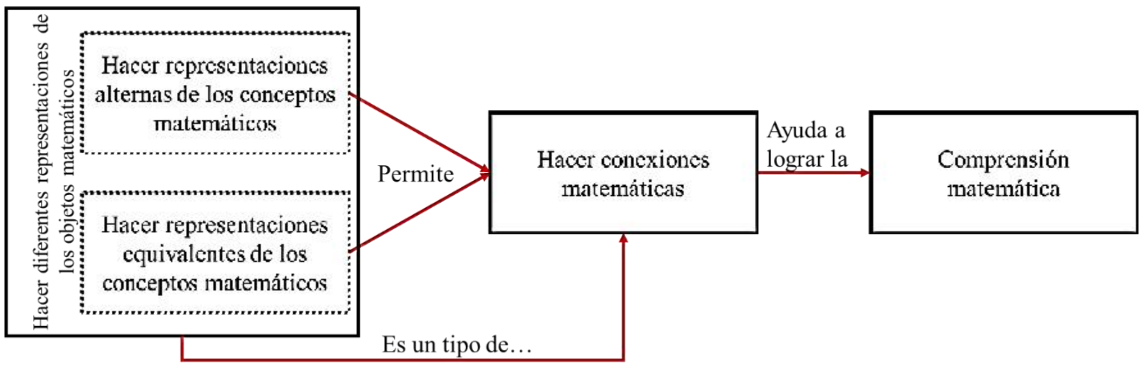


Figura 44. Relación entre las representaciones semióticas, las conexiones matemáticas y la comprensión matemática.

Característica

Cuando un objeto o concepto matemático es presentado al estudiante éste trata de identificar algún atributo invariante o cualidad que lo distinga de otros, es decir, alguna característica que le permita reconocerlo en otros contextos. A esto se le llamó conexiones matemáticas de tipo característica en este trabajo. De esta manera, en esta categoría fueron incluidas aquellas conexiones matemáticas donde los estudiantes definen las características o describen las propiedades de los conceptos matemáticos que los hace diferentes de otros.

De esta manera, los resultados identificados en el presente estudio son consistentes con los reportados por Eli et al. (2011, 2013) quienes también identificaron esta conexión matemática con profesores de matemáticas. Por otra parte, los resultados de este estudio parecen ser posibilitados porque, al menos para el concepto de integral definida, se recomienda que esta conexión matemática sea desarrollada en los estudiantes del preuniversitario (DGB, 2013b). Si bien no se enfatiza mucho en la necesidad de desarrollar esta tipología de conexiones matemática en los programas de Cálculo, en el preuniversitario mexicano es probable que en situación escolar los profesores centren su atención en algunas propiedades o características de los conceptos matemáticas en el momento de trabajar con ellos. Por ejemplo, una característica de la función algoritmo es que está definida para valores mayores a cero.

Finalmente, esta tipología de conexión matemática es importante para desarrollar otras como la de características comunes identificada por Businskas (2008) en su marco teórico preliminar para estudiar conexiones matemáticas. Además, juega un papel importante para lograr la conexión matemática de tipo generalización. Por tanto, se debe prestar especial atención en aquellas características que los profesores asocian a conceptos matemáticos específicos en el proceso de enseñanza porque muy probablemente los estudiantes incorporarán esas particularidades en su sistema de creencias sobre esos conceptos matemáticos para diferenciarlos de otros.

Reversibilidad

Entre las etapas del desarrollo cognitivo de Piaget se encuentra la de operaciones concretas (tercera etapa) que se presenta cuando el niño tiene entre 7 y 12 años de edad. Es en esta etapa en que el niño desarrolla su pensamiento reversible (Gómez, 2009). En ese sentido, desarrollan la idea de reversibilidad al trabajar con tareas de conservación. Además, Gómez añade que el niño:

> "progresivamente, comprenden que, ante un fenómeno determinado, puede haber unas acciones que o bien anulen o nieguen los efectos de su acción inversa —reversibilidad por inversión—, conduciendo al punto de partida, o bien compensen los efectos de otra acción —reversibilidad por reciprocidad o compensación" (Gómez, 2009, p. 8).

Para Inhelder & Piaget (1958) la capacidad de revertir un proceso de pensamiento es fundamental en algunos problemas de matemáticas. La coordinación entre esas dos formas de reversibilidad (negación/inversión y reciprocidad/compensación dentro de un mismo sistema sería un rasgo de las operaciones formales —cuarta etapa del desarrollo cognitivo— (Inhelder y Piaget, 1958). Para Ramful & Olive (2008) la negación sucede en el caso de las clases y la reciprocidad (o compensación) en las relaciones. En el caso de las clases, según Ramful & Olive, la reversibilidad indica que cada operación directa tiene una inversa que la cancela o la niega.

Influenciada por las ideas de Piaget, para Woolfolk (2010) la reversibilidad es la "capacidad de pensar a través de una serie de pasos y luego invertir mentalmente los pasos y regresar hasta el punto de inicio; también se le llama pensamiento reversible" (p. 36). Esta postura es consistente con las ideas de Inhelder & Piaget (1958) quienes consideran que, la reversibilidad significa "la posibilidad permanente de regresar al punto de partida de la operación en cuestión" (p. 282). Por otra parte, la postura de Hackenberg (2010) respecto de la reversibilidad es consistente con las dos ideas previas, pues asume que la reversibilidad implica un proceso o secuencia, que se ha ido hacia adelante y que puede retroceder, o pasar de un estado equivalente a retroceder al punto de partida.

En matemáticas el proceso de reversibilidad cobra mucha importancia por los objetos que se manipulan. Por ejemplo, puede ser un requisito, ya sea en una sola operación como para encontrar el sumando faltante en un problema de suma y resta o, en una tarea de varios pasos como para encontrar el todo correspondiente a una fracción determinada (Ramful & Olive, 2008). Sin embargo, como Sparks, Brown & Bassler (1970) reconocen hay objetos que al someterse a ciertas alteraciones no son físicamente retornables a su condición original, por lo que la reversibilidad sólo será conceptual y en ese sentido, la operación inversa será una operación puramente mental. Por tanto, la reversibilidad del pensamiento hace disponible un pensamiento compensatorio que restaurará la condición original después de cualquier interrupción (Sparks et al., 1970).

Es importante mencionar que, dada a la naturaleza de los conceptos matemáticos, principalmente en Cálculo, éstos permiten desarrollar en los estudiantes el pensamiento reversible, es decir, como indica Haciomeroglu et al. (2009) la capacidad de establecer relaciones bidireccionales. Si bien hace falta mayor evidencia para asegurar que esto suceda en situación escolar, es significativo que los estudiantes, al menos los participantes en este estudio, reconocieran durante la entrevista algunas operaciones inversas como la suma-resta, multiplicación-división, potenciación-radicación y la derivada-integral, además de conceptos como posición-velocidad y velocidad-aceleración siempre que exista un modelo matemático que ayude a predecirlos.

Finalmente, la conexión matemática de tipo reversibilidad debería ser desarrollada por los estudiantes de Matemáticas en general, y de Cálculo, en particular, en el preuniversitario pues les seria de ayuda en cursos de más avanzados en el nivel superior. Además, sería de ayuda para mejorar su comprensión sobre conceptos matemáticos que guardan esa relación reversible. En ese sentido, es significativo que esta conexión matemática fuera identificada en las producciones de los participantes, además de que en otros estudios no ha sido categorizada como una tipología de conexiones matemáticas.

Significado

Para Pecharromán (2013) "el significado de un objeto matemático se desarrolla desde la funcionalidad organizativa que le da origen y lo representa (función: relación; fracción: partición; número natural: cuenta u ordena; las formas geométricas organizan el plano o espacio; etcétera)" (p. 129). Sin embargo, reconoce la influencia del contexto para acceder al significado, uso o la funcionalidad inmediata del objeto en el contexto. En ese sentido, Pecharromán (2013) explica, una función representa una relación entre dos variables, pero bajo el símbolo de integral definida representa el integrando o en una ecuación diferencial es la incógnita; el objeto + representa un valor positivo, una operación, una lateralidad (límites laterales), etc. Por su parte, Gómez (2005) considera que el significado que de un objeto matemático tiene una persona, está dado, además del uso que de este objeto se haga, por la explicación que se dé sobre ese objeto. Esta postura es consistente con la planteada por Pecharromán (2013).

Para distinguir el uso y el contexto de uso, Serrano (2005) propone como ejemplo que tener la idea de límite de una función, no significa que pueda ser usada con éxito para calcular el límite de ciertas funciones o bien, para determinar si existe o no su límite bajo ciertas condiciones. Esta postura es consistente con las ideas propuestas por Kilpatrick, Hoyles, Skovsmose & Valero (2005), quienes reconocen que el contexto de uso determina en parte el significado de un concepto matemático.

En resumen, algunos elementos que constituyen la conexión matemática de tipo significado están asociados a: la funcionalidad que un concepto matemático tiene para un alumno, su uso, su contexto de uso, el sentido que tiene para él e incluso puede estar limitado por su definición (como lo reconoce Kilpatrick et al., 2005). Estos elementos estuvieron inmersos en las conexiones matemáticas que los estudiantes hicieron. Por ejemplo, el contexto de uso de la constante de integración en la expresión $\int r(t)dt = p(t) + C$ es "población inicial de animales" en los problemas que evocaron conceptos biológicos. Asimismo, el contexto de uso de la derivada puntual en la expresión $p'(2) = 20$ es que "justo en el segundo año la población de animales aumentó 20 especies" en ese mismo tipo de problemas. Sin embargo, $f'(x)$ tiene otro significado en el contexto matemático, tal como lo identificaron los estudiantes participantes en este estudio.

Finalmente, es importante mencionar que las conexiones matemáticas de tipo significado son de suma utilidad para comprender los conceptos matemáticos y las relaciones entre estos. Su principal utilidad reside en que permite al estudiante darle sentido, interpretar la funcionalidad del concepto, delimitar su uso, pero también para definir algunos conceptos e interpretarlos según el contexto en el que estén situados. Como conexiones matemáticas es importante porque los estudiantes se hacen conscientes del papel que juegan los conceptos matemáticos en diferentes contextos, además del uso que pueden tener en distintas situaciones.

Parte-todo

En los resultados de este estudio se identificó una conexión matemática de tipo parte-todo. Eso es consistente con los resultados Businskas (2008) y Singletary (2012) quienes también las identificaron con profesores en servicio. En esta categoría, Businskas integró aquellas de tipo inclusión y generalización, mientras que Singletary (2012) aborda las de generación. Sin embargo, ambas relaciones (inclusión y generalización) son de suma importancia en la clase de matemáticas para lograr la abstracción. En ese sentido, Tall (2002) utiliza estos términos: generalización y abstracción tanto para denotar procesos en los que los conceptos se ven en un contexto más amplio y también los productos de esos procesos.

En ese sentido, para Dreyfus (2002) desarrollar la capacidad de abstracción es indicativo de haber logrado un nivel avanzado de pensamiento matemático. Sin embargo, para Dreyfus, los requisitos previos para lograr la abstracción, son la generalización (derivar o inducir a partir de casos particulares, es decir, identificar puntos en común y expandir dominios de validez) y la síntesis (combinar o componer partes de tal manera que formen un todo, una entidad, pero este conjunto es más que la suma de sus partes).

Por su parte, Harel & Tall (1989) distinguen tres tipos diferentes de generalización que dependerá de la construcción mental de cada individuo.

1. La generalización expansiva ocurre cuando el sujeto expande el rango de aplicabilidad de un esquema existente sin reconstruirlo.

> 2. La generalización reconstructiva ocurre cuando el sujeto reconstruye un esquema existente para ampliar su rango de aplicabilidad.
>
> 3. La generalización disyuntiva ocurre cuando, al pasar de un contexto familiar a uno nuevo, el sujeto construye un nuevo esquema disjunto para tratar el nuevo contexto y lo agrega a la matriz de esquemas disponibles (p. 2).

En ese sentido, Harel & Tall (1989) consideran que un proceso de abstracción ocurre cuando una persona enfoca su atención en las propiedades específicas de un objeto dado y luego considera estas propiedades en forma aislada del original. Esto significa que los estudiantes deberían identificar patrones para construir una idea más general sobre el proceso matemático en el que está inmerso. En ese sentido, es significativo que los estudiantes en este estudio indicaran que "la representación gráfica de una función polinomial puede prolongarse en ambos extremos" reconociendo cierta generalización respecto del esbozo de la gráfica de una función polinomial. Es decir, en otras palabras, *parecen* reconocer que la porción de la gráfica que dibujan tiene dominio en un intervalo cerrado de la forma $[a, b]$ y que esto es un caso particular de la gráfica completa cuyo dominio son el conjunto de los números reales.

Finalmente, es importante mencionar que las conexiones matemáticas de tipo parte-todo donde están incluidas aquellas relaciones de generalización son importantes para ser desarrolladas en los estudiantes porque les permitirá llegar a la abstracción matemática. Además, como lo señala Dindyal (2007), la generalización es un aspecto importante en las matemáticas que impregna todas las ramas de la materia y es una característica destacada en la enseñanza de la asignatura en prácticamente todos los niveles. Por ello, su importancia en el proceso enseñanza-aprendizaje, aunque la poca frecuencia de esta tipología de conexiones matemáticas en este estudio indica que no son suficientemente estimuladas en situación escolar.

5.2 Sobre las concepciones alternativas en Cálculo

Cuando se exploran conexiones matemáticas que hacen los estudiantes al resolver tareas específicas, es inevitable que aparezcan concepciones alternativas que inhiben la posibilidad de que hagan conexiones matemáticas. Las concepciones alternativas identificadas en este estudio, en su mayoría, no han sido reportadas por la literatura en educación matemática que se centra en este tema. Esto resalta la importancia de los resultados e invitan a reflexionar sobre el papel de los docentes, al ser una de las fuentes de las concepciones alternativas en lo estudiantes al desarrollar en ellos falsas ideas sobre conceptos previos, por ejemplo, de aritmética y álgebra. La Tabla 15 resume estos resultados, algunos de sus posibles orígenes dentro de la enseñanza de las Matemáticas y posibles obstáculos que pueden significar en la comprensión de otros conceptos matemáticos más avanzados en el proceso de aprendizaje.

Tabla 15. Concepciones alternativas, sus posibles orígenes y efectos en el aprendizaje.

Origen de la concepción	Concepción alternativa	Puede afectar la comprensión de.
Jerarquía de las operaciones múltiples en aritmética.	1. La derivada de la integral de una función polinomial (o viceversa) se obtiene calculando la derivada y la integral por separado, ignorando el sentido reversible de ellas.	El Teorema Fundamental del Cálculo.
Fórmula para calcular la velocidad en Física.	2. La velocidad instantánea a la que se desplaza un objeto se obtiene mediante la fórmula $v = d/t$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo).	Velocidad promedio y velocidad instantánea
Concepto de función.	3. El resultado de $f'(a)$ sólo significa que estamos encontrando un valor para *y* cuando *x* vale *a*.	La derivada de primer y segundo orden. Que gráficamente $f(x) \neq f'(x)$. Significados de la derivada puntual en problemas de aplicación.
Significado de las literales.	4. En $f(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función.	El significado de expresiones que utilicen distintas variables.
Concepto de derivada utilizando la notación $\frac{dy}{dx}$.	5. Al resultado de calcular una derivada se le debe agregar d*x* que representa su carácter de derivada.	El significado del diferencial en derivadas parciales o en integrales dobles y triples.
Puntos que constituyen una recta tangente.	6. $f'(a)$ significa un punto por donde pasa la recta tangente a una curva.	El concepto de la primera y segunda derivada en un punto. Que gráficamente $f(x) \neq f'(x)$. Significados de la derivada puntual en problemas de aplicación.
Significado de la literal.	7. $p'(a) = k$ significa que la población tardó en crecer *k* años.	El concepto de la derivada puntual en problemas de aplicación.
Concepto de velocidad promedio.	8. $p'(a) = k$ significa que la velocidad de crecimiento por año es *k*.	El significado de velocidad en un instante específico
El concepto de recta tangente	9. La derivada interpretada en una gráfica, es la recta tangente que toca a la curva en un punto máximo.	El significado gráfico de la primera y segunda derivada

Estos resultados indican que algunos estudiantes poseen débiles conocimientos de la derivada y la integral, resultados que son consistente con lo reportado por Denbel (2014). Asimismo, son coincidentes con los reportados por Kaplan et al. (2015) quienes encontraron que los estudiantes presentaron concepciones alternativas asociadas a la velocidad instantánea en problemas de física, es decir, suelen utilizar la fórmula $v = d/t$ para calcular la velocidad instantánea.

Por otra parte, los estudiantes que manifestaron la primera concepción alternativa indicada en la Tabla 15, utilizaron la fórmula $\frac{d}{dx}ax^n = anx^{n-1}$ para calcular la derivada solicitada, sin embargo, si ellos no comprenden lo que ésta representa y el contexto donde puede ser utilizada, entonces podría llevarlos a dar resultados como: la derivada de la función $y = x^x$ es xx^{x-1} como lo reportan Muzangwa & Chifamba (2012). Esto evidentemente los lleva a una escasa comprensión del TFC. Además, si los estudiantes no comprenden el TFC entonces ellos podrían pensar que $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$ significa el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ tal como lo reportan Muzangwa & Chifamba (2012) cuando en realidad ese cálculo no tiene sentido, puesto que hay una discontinuidad en $x = 0$. Sin embargo, es significativo que la concepción alternativa 1 (Tabla 15) permanece débil en algunos estudiantes y fue posible un cambio de concepción para finalmente hacer una conexión matemática asociada al TFC.

Por otra parte, en las concepciones alternativas "el resultado de $f'(a)$ sólo significa que estamos encontrando un valor para *y* cuando *x* vale *a*" y "$f'(a)$ significa un punto por donde pasa la recta tangente a una curva" la idea que parece permear en los estudiantes es el concepto de función visto como una regla de correspondencia y que es extrapolado al significado de función derivada puntual. Esto los lleva a pensar que el significado de $f'(a)$ y $f(a)$ es el mismo. Igualmente, la concepción alternativa "en $f(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función" es indicativo que en algunos estudiantes existe una comprensión incompleta respecto del significado semiótico de la expresión $f(x)$.

Para evitar esos obstáculos y permitir un uso flexible de las funciones, Best & Bikner-Ahsbahs (2017) sugieren construir su significado tanto como regla de correspondencia como covariación dentro y entre todos los tipos de representaciones posibles, y también entre diferentes funciones. Por su parte, la concepción alternativa "el resultado de $f'(a)$ sólo significa que estamos encontrando un valor para *y* cuando *x* vale *a*", así como "la velocidad instantánea a la que se desplaza un objeto se obtiene mediante la fórmula $v = d/t$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo)" provoca la emergencia de otras concepciones alternativas cuando se trabaja con tareas gráficas y se resuelven problemas de aplicación que evocan conceptos biológicos. Esto explica en parte las concepciones alternas 7, 8 y 9 (Tabla 15) identificadas en estudio.

Estos resultados hacen que coincidamos con An & Wu (2012) cuando indican que es necesario proporcionar retroalimentación en situación escolar, para lidiar con esas concepciones alternativas. Sin embargo, ello no bastará, porque algunas concepciones alternativas son resistentes al cambio. Al respecto, Read (2004), Lucariello, Tine & Ganley (2014), Kennedy (2015), Bostan (2016) y Dolores et al. (2007) sugieren que es necesario utilizar métodos que promuevan el cambio conceptual para cambiar esas ideas en los estudiantes. Para Pajares (1992) se debe promover un cambio de creencias cuando las existentes resulten insatisfactorias.

En relación con el cambio conceptual, Kennedy (2015) resalta que es importante dentro de este proceso asegurarse de que el estudiante está cambiando genuinamente su propio pensamiento, en lugar de llevar al estudiante a la respuesta "correcta", porque ello podría promover la memorización en los estudiantes con el único fin de aprobar un examen, pero volver a sus concepciones previas en otros contextos, tal como lo reconoce Libarkin (2001). Es decir, promover el cambio conceptual no es tarea fácil (Lucariello et al., 2014). Por su parte, Mulhal & Gunstone (2012) sugieren que la resolución de problemas sea introducida en el aula después de que se haya desarrollado la comprensión de los conceptos previos en los estudiantes. Este estudio añade que, aquellas concepciones alternativas que permanecen débiles en los estudiantes son susceptibles de ser cambiadas mediante las Entrevistas Basadas en Tareas que promueva la reflexión en los estudiantes respecto del proceso que siguen para resolver las tareas matemáticas, de sus resultados, así como la comunicación que hagan de ellos con sus pares. El trabajo colectivo podría ayudar este cambio de las concepciones alternativas.

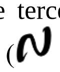
5.3 Conclusión

El presente trabajo planteó inicialmente tres preguntas de investigación: ¿Qué conexiones matemáticas hacen los estudiantes del preuniversitario al resolver tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral?, ¿Qué relación guardan esas conexiones matemáticas que los estudiantes del preuniversitario hacen en las tareas de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral y cómo contribuyen a la comprensión matemática del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)?, y, ¿Qué concepciones alternativas aparecen cuando los estudiantes del preuniversitario resuelven tareas (algebraicas, gráficas y problemas de aplicación) de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral? Esto llevó a plantearse tres objetivos: describir y categorizar esas conexiones matemáticas que los estudiantes hacen, establecer relaciones entre ellas asociadas a la comprensión del TFC y, finalmente, identificar las concepciones alternativas que aparecen en el proceso de resolución de las tareas propuestas a los estudiantes.

Para responder esas preguntas se utilizaron a las Entrevistas Basadas en Tareas para la colecta de datos y el análisis temáticos para analizar las producciones de los estudiantes. Los resultados indicaron la presencia de 33 conexiones matemáticas (intramatemáticas y extramatemáticas) de las cuales, 4 fueron categorizadas como procedimental, 11 de representaciones diferentes, 7 de reversibilidad, 1 de parte-todo, 4 característica y 6 de significado que respondieron a la primera pregunta de investigación (Tabla 16). Por su otra parte, los resultados indicaron que las conexiones matemáticas estaban fuertemente relacionadas unas con otras formando sistemas de conexiones matemáticos (discutido en la sección de resultados y la discusión). La variación en el número de estudiantes que hicieron cada tipo de conexión matemática, así como la complejidad de los sistemas de conexiones matemáticas (asociados a la primera y segunda parte del TFC, así como al concepto función) que logró cada estudiante indicó que el nivel de comprensión de los estudiantes participantes fue diferente en cada caso.

Tabla 16. Conexiones matemáticas identificadas en las producciones de los estudiantes.

GRUPO	CONEXIÓN MATEMÁTICA	CATEGORIZACIÓN	
Derivada o integral	1. La derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$.	Conexiones intramatemáticas	Procedimental
	2. La integral de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ es $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.		
	3. La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva.		Significado
	3.1 $f'(a)$ significa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$.		Representaciones diferentes
	4. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.		Característica
	5. La integral está asociada con el área bajo una curva.		Significado
	5.1 La integral definida significa área bajo la curva.		Representaciones diferentes

		5.2 El resultado de una integral definida significa área.		Representaciones diferentes
		5.3 La integral es la suma de las áreas de los rectángulos inscritos bajo la curva.		Representaciones diferentes
	6. Una integral definida tiene límites de integración.			Característica
		6.1 Los límites de integración significan el intervalo donde se debe calcular el área bajo la curva.		Significado
	7. La constante de integración C …	7.1 significa una familia de primitivas desplazadas verticalmente en el eje de las ordenadas.		Representaciones diferentes
		7.2 siempre acompaña al resultado de una integral indefinida		Característica
	8. El diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función.			Significado
TFC	9. La derivada y la integral son operaciones inversas.			Reversibilidad
		9.1. La derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función.		Reversibilidad
		9.2. La integral de la derivada de una función polinomial es la misma función.		Reversibilidad
	10. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada.			Procedimental
Representaciones gráficas de funciones derivadas o antiderivadas	11. La representación gráfica…	13.1 de una función cuadrática o de segundo grado es una parábola.		Representaciones diferentes
		13.2 de una función lineal o de primer grado es una línea recta		Representaciones diferentes
		13.3 del término independiente de una función es el valor donde corta al eje de las ordenadas.		Representaciones diferentes
		13.4 de una función polinomial puede prolongarse en ambos extremos.		Parte-todo
		13.5 de una función cúbica o de tercer grado es como una “S” acostada ( o ).		Representaciones diferentes
	12. La *forma* de una representación gráfica asociada a una función polinomial permite identificar el grado de esta.			Característica
Conceptos biológicos	13. Calcular la velocidad de crecimiento de una especie significa encontrar la derivada de la representación algebraica asociada a la población total.		Conexiones extramatemáticas	Reversibilidad
	14. La integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total.			Reversibilidad
	15. En $\int r(t)dt = p(t) + C$ la constante de integración C significa población inicial de animales.			Significado
	16. El resultado de $p'(2) = 20$ significa que justo en el segundo año la población aumentó 20 especies.			Significado
Conceptos físicos	17. La integral de la función aceleración de un objeto es su velocidad y la integral de la función velocidad es su posición.			Reversibilidad
	18. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración.			Reversibilidad
	19. La velocidad de un objeto en su altura máxima es cero.			Representaciones diferentes

20. Encontrar una función primitiva de la posición de un objeto, dada una posición inicial, implica primero calcular una integral y segundo, resolver una ecuación lineal.	Procedimental
21. El resultado de $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en $t = a$.	Representaciones diferentes

En relación con la segunda pregunta de investigación esta fue discutida ampliamente en la sección de discusión. Sin embargo, más adelante se ofrecen algunas reflexiones sobre ello, así como su relación con las creencias matemáticas y la comprensión matemática de los estudiantes. Por su parte, en relación con la tercera pregunta de investigación se identificó a partir de las producciones verbales y gestuales de los estudiantes, además de sus producciones escritas un total de nueve concepciones alternativas donde las más frecuentes fueron: la derivada de la integral de una función polinomial (o viceversa) se obtiene calculando la derivada y la integral por separado, ignorando el sentido reversible de ellas (*f*=20), la velocidad instantánea a la que se desplaza un objeto se obtiene mediante la fórmula $v = d/t$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo, *f*=14), el resultado de $f'(a)$ sólo significa que estamos encontrando un valor para y cuando x vale a (*f*=10) y en $\boldsymbol{f}(x) = 3x^2$, $f(x)$ por sí sola significa función (*f*=10). Sin embargo, la entrevista indicó que cuando se motiva a los estudiantes a reflexionar o a hacer una visión retrospectiva de sus resultados y procedimientos empleados, entonces para aquellas concepciones alternativas que permanecen débiles en sus sistemas de creencias son susceptibles de cambio posibilitando que hagan conexiones matemáticas.

No obstante, hay otras concepciones alternativas que permanecen muy incrustadas en los sistemas de creencias de los estudiantes que son resistentes al cambio. Éstas pueden obstaculizar la comprensión de algunos conceptos avanzados de Cálculo tales como derivadas parciales, derivadas sucesivas, gráficas de la primera y segunda derivada, integrales dobles y triples, pero también limitar la comprensión de la derivada y de la integral en problemas de aplicación que evoquen conceptos de biología, física o de otra disciplina. Por ejemplo, la persistencia de la concepción alternativa “la velocidad instantánea a la que se desplaza un objeto se obtiene mediante la fórmula $v = d/t$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo)” desarrollada en los estudiantes desde el nivel básico obstaculiza comprender en el nivel preuniversitario el significado de posición y velocidad en física y, de población total y velocidad de crecimiento en biología.

El hecho de que sólo se hayan identificado un total de 67 concepciones alternativas en las 16 tareas propuestas en los 25 participantes de este estudio reside en que la mayoría de ellos tenían un buen rendimiento en Matemáticas, sin embargo, este resultado es indicativo de que alumnos con rendimiento regular y mal tendrán un mayor número de concepciones alternativas. Queda, por tanto, seguir realizando investigaciones que identifiquen esas concepciones alternativas en los estudiantes del preuniversitario para conceptos relacionados con el TFC y otros contenidos matemáticos, pero también en estudiantes universitarios tanto en Cálculo como en otros dominios de las Matemáticas.

5.3.1 Una forma de concebir a la comprensión matemática desde las conexiones matemáticas

Los resultados sugieren que existen sistemas de creencias que preceden a los sistemas de conexiones matemáticas, dado que las conexiones matemáticas también aparecen interrelacionadas (Figura 45). Sin embargo, esos mismos sistemas de creencias posibilita que en algunos estudiantes se manifiesten las concepciones alternativas y consecuentemente, no logren la comprensión matemática que requieren para sus cursos más avanzados (Figura 45).

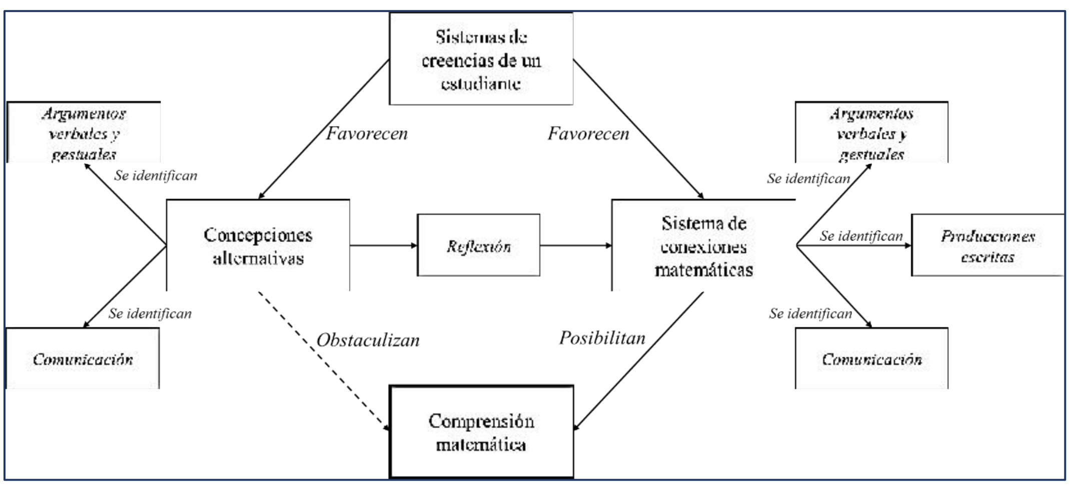


Figura 45. Relación entre los sistemas de creencias de los estudiantes, las conexiones matemáticas, las concepciones alternativas y la comprensión matemática.

En la Figura 45 se sinterizan algunas reflexiones que se desprenden de los resultados del presente estudio. Estos sugieren que en relación con algunos conceptos matemáticos centrales existen sistemas de conexiones matemáticas específicas (Figura 46) las cuales pueden ser identificadas, en al menos tres formas: producciones escritas, en los argumentos verbales o gestuales que desarrolle el estudiante y en la comunicación de sus resultados y procedimientos con sus pares o con el profesor, donde dos de ellos son complementarios para identificar la presencia o ausencia de una conexión matemática. Por su parte, las concepciones alternativas se identifican con mayor claridad en sus argumentos verbales y gestuales o en la comunicación de sus resultados y procedimientos seguidos. No obstante, promover la reflexión sobre estos procesos puede permitir que el estudiante llegue a establecer una conexión matemática siempre que la concepción alternativa que él manifieste esté a un nivel débil en sus sistemas de creencias.

Por los resultados del presente estudio, algunas creencias matemáticas *inferidas* que preceden a las categorías de conexiones matemáticas identificadas y que los estudiantes hacen son:

1. Para realizar determinadas operaciones matemáticas es necesario utilizar fórmulas específicas.
2. Los conceptos matemáticos tienen características particulares que permiten diferenciarlos de otros.
3. Los conceptos matemáticos se pueden representar de manera verbal, tabular, numérica o gráfica.
4. Los símbolos matemáticos adquieren significados distintos según el contexto de uso.
5. La visualización ayuda a identificar el grado asociado a las funciones polinomiales dadas gráficamente.
6. El resultado de las operaciones matemáticas tiene distintos significados según el contexto de uso.
7. Las operaciones matemáticas sobre los objetos matemáticos tienen sus correspondientes inversas que anulan el efecto de las primeras.
8. Los modelos matemáticos y las operaciones matemáticas adquieren distintos sentidos cuando se resuelven problemas de aplicación.

Por otra parte, este trabajo plantea que hay conceptos matemáticos que son centrales para la comprensión de otros más avanzados, por ejemplo, función, límite, razón de cambio y la idea de acumulación pueden ayudar a comprender conceptos como derivada e integral y éstos a su vez ayudan a entender al TFC. Asociados a estos existen sistemas de conexiones matemáticas que los estudiantes son capaces de hacer (Figura 46) que puede ser diferente en cada caso según sus sistemas de creencias previas que estos tengan; en ese sentido, podrá ser diferente en relación con cada concepto matemático. La complejidad del sistema de conexiones matemáticas que cada estudiante haga y el uso que éste haga de ese sistema para resolver tareas concretas permitirá inferir su nivel de comprensión en relación con contenidos matemáticos específicos.

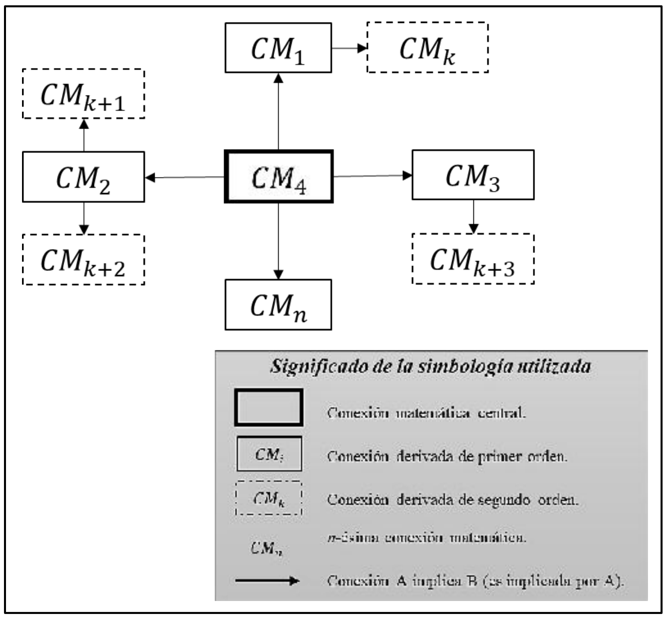


Figura 46. Sistema de conexiones matemáticas *hipotética* asociadas a un concepto matemático.

La figura 46 ejemplifica que hay una conexión matemática central y hay conexiones matemáticas derivadas de primer y segundo orden, tal como se mostró en la sección de resultados. Algunas conexiones matemáticas derivadas de primer orden tendrán conexiones derivadas de segundo orden y otras no. Por otra parte, considerando estas ideas, existirán sistemas de conexiones matemáticas (SCM) asociadas a diferentes conceptos matemáticos, es decir, habrá un SCM_1, SMC_2, SMC_3, …, SCM_n que pueden corresponder a diferentes dominios matemáticos, a la relación de estos con otras disciplinas e incluso con situaciones de la vida real; un estudiante tendrá cierta comprensión sobre las matemáticas en general cuando sea capaz de relacionar esos sistemas de conexiones matemáticas en un todo coherente (Figura 47). Es decir, un estudiante que sea capaz de relacionar el SCM_1 con el

SCM_2, SCM_3, …, SCM_n y viceversa (Figura 47), tendrá una mejor comprensión que aquél que sólo relacione el SCM_1 con el SCM_2, pero no logre vincularlos con los otros sistemas de conexiones matemáticas.

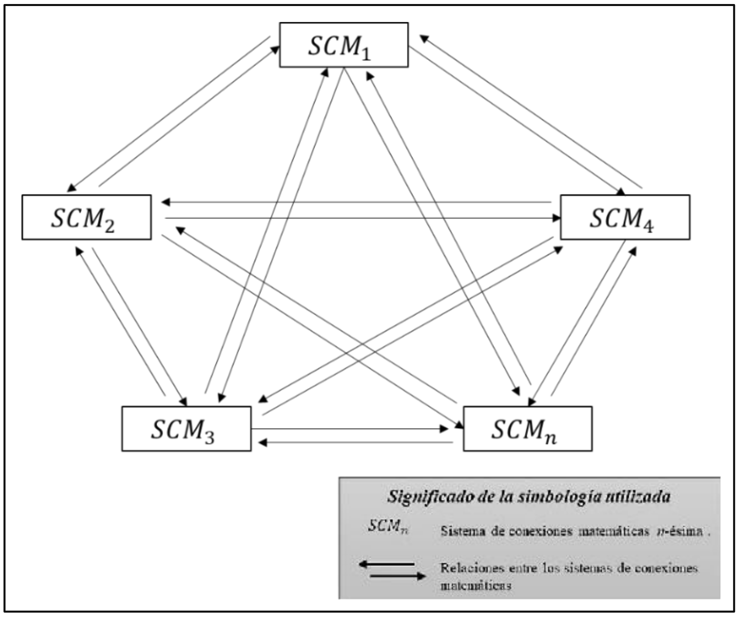


Figura 47. Relación entre los sistemas de conexiones matemáticas.

En la Figura 47 las dobles flechas de implicación indican que un estudiante podría ser capaz de relacionar el SCM_1 con el SCM_2, pero no realizar el proceso inverso, esto dependerá de sus sistemas de creencias matemáticas previos. Por supuesto, para fortalecer estos resultados se requiere un mayor número de investigaciones que exploren creencias matemáticas y conexiones matemáticas para distintos contenidos matemáticos. Por otra parte, las figuras 28, 29 y 30 plantean una forma de concebir a la comprensión matemática asumiendo como central a las conexiones matemáticas, además de considerar el papel de las *no*-conexiones matemáticas que en este estudio se reconocen como concepciones alternativas. En el caso de las conexiones matemáticas, las tipologías como: procedimental, representaciones diferentes, significado, reversibilidad, característica y parte-todo serán fundamentales para lograr una mejor comprensión.

En ese sentido, una contribución de este trabajo es en relación con un marco preliminar (Figura 48) para caracterizar a las conexiones matemáticas en Calculo y en los procesos que desarrollan los estudiantes al trabajar con tareas específicas. Por ejemplo, si a los estudiantes se les propone un problema no matemático entonces ellos harán la conexión de modelado cuando planten el modelo matemático que ayude a resolver el problema. En cambio, cuando se les plantea un problema de aplicación donde esté dado el modelo matemático entonces las conexiones extramatemáticas aparecen cuando los estudiantes relacionen contenidos matemáticos con contenidos de otras disciplinas o con conceptos de la vida real, pero al momento de resolver el problema harán conexiones intramatemáticas porque el trabajo que harán será entre conceptos matemáticos.

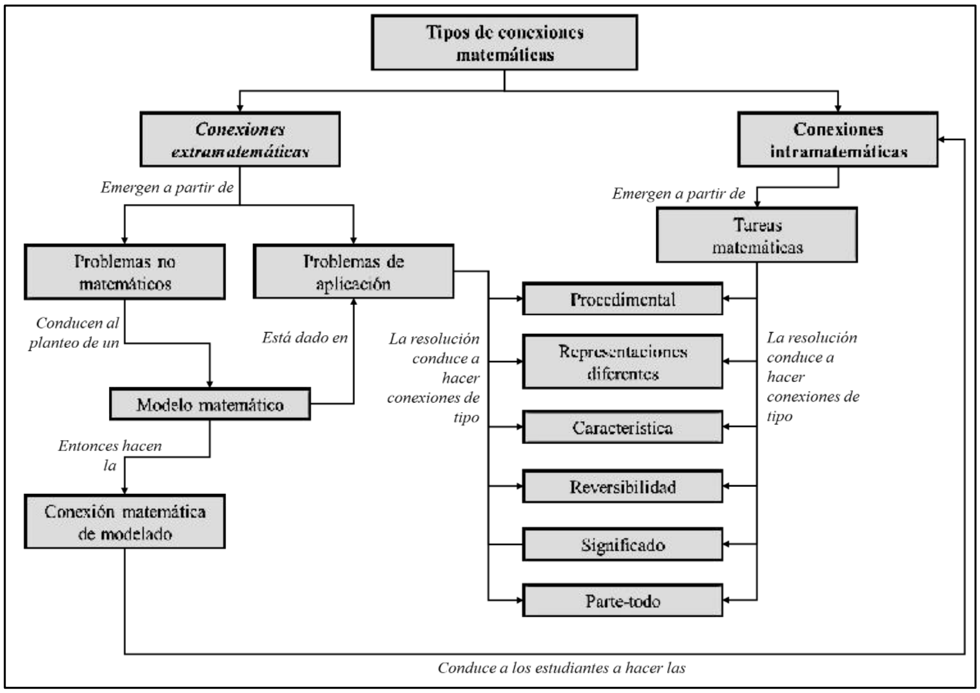


Figura 48. Tipos de conexiones matemáticas.

La figura 48 también indica que las conexiones intramatemáticas aparecen cuando los estudiantes resuelven tareas matemáticas, en este estudio al calcular derivadas, derivadas puntuales, integrales, derivada de una integral, integral de una derivada, construir gráficas de funciones derivadas y antiderivadas, etc. Este modelo propuesto para caracterizar a las conexiones matemáticas en el proceso de resolver problemas y tareas es preliminar y puede ser ampliado a la luz de nuevos resultados de investigaciones que exploren conexiones matemáticas. Pero, también, otras categorías que han sido identificadas con profesores de matemáticas podrían ser incluidas en este modelo preliminar. Por ejemplo, aquella conexión que Businskas (2008) llama características comunes podría ser incluida en la tipología *conexión matemática característica.*

5.3.2 Implicaciones para la enseñanza-aprendizaje del Cálculo

Al igual que Eli at al. (2011, 2013), el presente estudio plantea la necesidad de crear secuencias centradas en las conexiones matemáticas para la enseñanza de las Matemáticas en general, y para el Cálculo en particular, donde sea tomado en cuenta el papel que juegan los sistemas de creencias matemáticas de los estudiantes y sus concepciones alternativas en el proceso de aprendizaje para el desarrollo de la comprensión matemática. En estas secuencias el papel de las representaciones diferentes también será de suma importancia para comprender procesos matemáticos como la diferenciación y la integración.

En el nivel preuniversitario una propuesta para la enseñanza del Cálculo podría plantear como tema central el TFC donde las ideas matemáticas previas sean el concepto de razón de cambio y la idea de acumulación. Considerando como eje al TFC y la conexión matemática de reversibilidad se podría resolver problemas de matemáticas, biología, administración, mecánica, física, etc., donde el foco de atención sean la derivada y la integral mediado por el TFC (Figura 49).

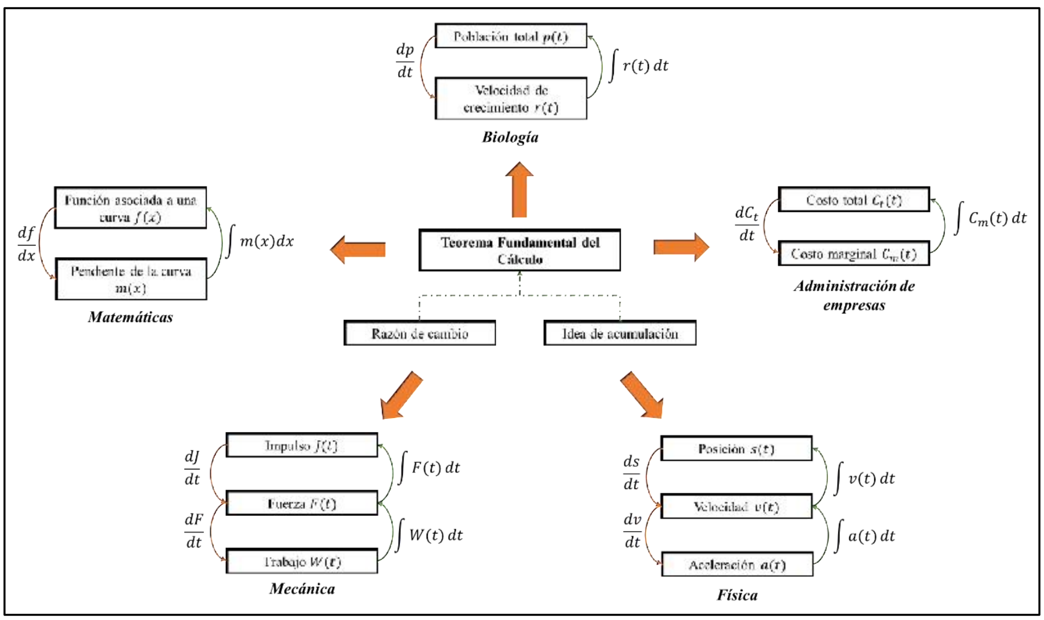


Figura 49. El TFC como concepto central para una propuesta de enseñanza.

Una propuesta como la que se sugiere implicaría conectar diversos conceptos tanto intramatemáticos como extramatemáticos tal como lo sugieren los programas de Cálculo Diferencial (DGB, 2013a) y Cálculo Integral (DGB, 2013b). Sin embargo, también implicaría que estos cursos se integren en uno solo donde los contenidos deberían reorganizarse a través en conceptos centrales que articulen las ideas necesarias y suficientes para desarrollar en los estudiantes del preuniversitario la comprensión matemática del TFC. Esto significa eliminar contenidos matemáticos que son secundarios o cuyo papel no es central para alcanzar este objetivo.

Las conexiones matemáticas deberán jugar un papel central en esta propuesta porque permitiría una mejora de la comprensión matemática. Sin embargo, exige un compromiso del profesor para cambiar la forma de trabajo en el aula, además de promover el trabajo colectivo con sus estudiantes. Exige también de los profesores hacer conexiones matemáticas explicitas en el aula y promover el uso de ellas entre sus estudiantes, pero también demanda conocimientos didácticos para reorganizar el contenido matemático propuesto en los planes y programas de estudio para el curso de Cálculo. Los profesores también necesitan tener conocimientos de otras disciplinas para reconocer el uso de las matemáticas en ese contexto.

Finalmente, los profesores deben poner especial atención en las concepciones alternativas que los estudiantes tienen para promover en el aula actividades de retroalimentación que ayuden al logro de un cambio conceptual. Esto porque la fuente de las concepciones alternativas son principalmente los profesores como lo sugieren las respuestas de los estudiantes durante la entrevista. Por supuesto, esta tarea no es fácil en un grupo numeroso, pero es necesario para ayudar a los estudiantes a hacer conexiones matemáticas, tanto intramatemáticas como extramatemáticas.

5.4 Limitaciones teóricas-metodológicas y futuras investigaciones

Durante el desarrollo de este trabajo existieron limitaciones que obligaron en múltiples ocasiones a la toma de decisiones para continuar. En ese sentido, la primera de ellas fue la escasa literatura que estudia conexiones matemáticas en el campo del Cálculo, de hecho, sólo se identificaron aquellas que se centran en tareas gráficas de la derivada o antiderivada. Si bien esta fue una limitante para saber qué dirección tomar, también ofreció ideas respecto al vacío en este campo y la importancia de estudiar conexiones matemáticas en Cálculo.

La segunda limitante fue una acepción clara para el constructo teórico *conexiones matemáticas.* Muchas de las investigaciones que dicen explorar conexiones matemáticas dan la idea del uso trivial del término, pero poco claras para identificar lo que no es una conexión matemática. Esto llevó a considerar algunas de las características sobre las conexiones matemáticas que ofrecieron la literatura revisada para plantear una definición más *ad hoc* a los intereses del presente estudio, tal como lo sugirió una investigadora sobre esta temática al autor del presente trabajo.

Tercero, existieron y existen limitaciones metodológicas en el presente estudio. Inicialmente, una limitación fue el método adecuado para colectar datos. A sugerencia de una investigadora y por la lectura sugeridas se optó por las Entrevistas Basadas en Tareas. Segundo, el protocolo utilizado planteó un número alto de tareas con el fin de explorar las conexiones matemáticas en los registros algebraico y gráfico, además de la resolución de problemas de aplicación. Sin embargo, esto evitó que se pudiera profundizar en los argumentos empleados por los estudiantes por el factor tiempo.

En promedio una entrevista tuvo una duración de 90 minutos y eso fue una limitante porque las entrevistas se desarrollaron durante un día hábil cuando los estudiantes tenían clases. Esto llevó a que el protocolo considerara algunas preguntas durante la entrevista, pero no se pudo indagar sobre la representación que los estudiantes hacen de esas ideas que manifiestan, por ejemplo, cuando definieron la derivada puntual faltó explorar las representaciones que sobre esos objetos hacían los estudiantes. Finalmente, el análisis de los datos colectados significó una limitante inicial, pero con el desarrollo de la investigación se optó finalmente por el análisis temático que permite analizar datos con poca e incluso sin teoría.

Las limitaciones teóricas y metodológicas del presente estudio, así como el origen de las conexiones matemáticas que los estudiantes hicieron (enseñanza recibida de sus profesores, los contenidos de los libros de texto, su experiencia extraescolar, su experiencia con las matemáticas, la preparación que recibieron en cursos y, en general, de sus sistemas de creencias previos), se plantea que futuras investigaciones pueden explorar: los sistemas de creencias matemáticas y las conexiones matemáticas que hacen al trabajar contenidos matemáticos específicos, los sistemas de conexiones matemáticas que los estudiantes hacen al resolver problemas de aplicación que evoquen conceptos de diversas disciplinas (administración, finanzas, biología, ecología, mecánica, física, etc.), además de aquellos sistemas de conexiones matemáticas que los estudiantes hacen al resolver problemas no matemáticos, es decir, aquellos donde no están dados los modelos matemáticos que resuelven los problemas. Estas investigaciones pueden desarrollarse tomando como población a los estudiantes del preuniversitario y del nivel superior, además de que se puede centrar el análisis en los sistemas de creencias matemáticas de los profesores de matemáticas, sus sistemas de conexiones matemáticas al resolver tareas específicas y las conexiones matemáticas que promueve en situación escolar para distintos dominios matemáticos.

Referencias bibliográficas

Ahluwalia, A. (2011). *Tracing the building of Robert's connections in mathematical problem solving: A sixteen year study*. Unpublished dissertation, State University of New Jersey. United States of America.

Amirali, M. (2010). Students' conceptions of the nature of mathematics and attitudes towards mathematics learning. *Journal of Research and Reflections in Education, 4*(1), 27–41.

An, S. & Wu, Z. (2012). Enhancing mathematics teachers' knowledge of students' thinking from assessing and analyzing misconceptions in homework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 717–753.

Ariza, A., Llinares, S. & Valls, J. (2015). Students' understanding of the function-derivative relationship when learning economic concepts. *Mathematics Education Research Journal, 27,* 615–635.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301–317.

Aspinwall. L. & Shaw, K. L. (2002). Representations in Calculus: Two contrasting cases. *Mathematics Teacher*, *95*, 434–439.

Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science, 2*(1), 17–26.

Bajracharya, R. R. (2014). *Student application of the fundamental theorem of calculus with graphical representations in mathematics and physics*. Unpublished PhD Thesis. The University of Maine. United States of America.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphic schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(5), 557–578.

Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S. & Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematical connections to the real-life. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *1*(2009), 1402–1407.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 217–241.

Begg, A. (2011). Ethnomathematics: Why, and What Else? *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *33*(3), 71–74.

Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 479–495.

Best, M. & Bikner-Ahsbahs, A. (2017). The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change. Z*DM Mathematics Education*, 49, 865–880

Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceeding of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 73–80). Hiroshima, Japan: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 487–500.

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: using theory, research and 'working hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *51*, 3–21.

Bostan, A. (2016). Conceptual Level of Understanding about Sound Concept: Sample of Fifth Grade Students. *e-International Journal of Educational Research, 7*(1), 87–97.

Boyer, C. B. (1949). *The history of the Calculus and its conceptual development*. United States of America: Dover.

Braun, V, & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *Handbook of Research Methods in Psychology Vol. 2* (pp. 57–71). Washington, DC: American Psychological Association.

Brown, L. (Ed.). (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles.* Oxford: Clarendon Press.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Unpublished PhD Thesis. Simon Fraser University. Canada.

Cai, J. & Ding, M. (2015). On mathematical understanding: perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teachers Education, 18*(5), 1–25.

Carlson, M. P., Persson, J., & Smith, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 165–172). Honolulu, USA.

Chhabra, M. & Baveja, B. (2012). Exploring minds: alternative conceptions in science. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 55*(2012), 1069–1078.

Chi, M. T. H., Roscoe, R., Slotta, J., Roy, M. & Chase, M. (2012). Misconceived causal explanations for emergent processes. *Cognitive Science, 36*, 1–61.

Chow, T. F. (2011). *Students' difficulties, conceptions and attitudes towards learning algebra: an intervention study to improve teaching and learning.* Unpublished doctoral dissertation, Curtin University. Australia.

Clarke, V. and Braun, V. (2013) 'Teaching thematic analysis: Overcoming challenges and developing strategies for effective learning'. *The Psychologist*, *26*(2), 120–123.

Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. In C. B. Cazden (Ed.), *Review of Research in Education v. 1* (pp. 3-56). Washington, DC: American Educational Research Association.

Contreras, L., Martínez, M., Lugo, O. & Montes, M. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral.* México: Santillana.

Cuesta, A., Deulofeu, J. & Méndez, M. A. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Revista Educación Matemática*, *22*(3), 5–21.

Cuevas, C. A. & Delgado, M. (2015). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *Revista de Cálculo, 7,* 108–119.

David, M. M. & Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*, 413–431.
Dawkins, P. C. & Mendoza, J. A. (2014). The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(6), 839–862.
De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337–344). Salamanca: SEIEM.
Denbel, D. G. (2014). Students' Misconceptions of the Limit Concept in a First Calculus Course. *Journal of Education and Practice, 5*(34), 24–40.
Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research*. London: Sage.
DGB. (2013a). *Cálculo diferencial.* Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf
DGB. (2013b). *Cálculo Integral.* Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_6sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf
Dindyal, J. (2007). High School Students' Use of Patterns and Generalisations. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 236–245): MERGA Inc.
Dolores, C. & García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 158–180. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08
Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas en estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(3), 195-218.
Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(3), 195–218.
Dolores, C., García-García, J. & Gálvez-Pacheco, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación Matemática, 29*(2), 125–158.
Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 10, 1243–1267.
Drageset, O. G. (2010). The Interplay Between the Beliefs and the Knowledge of Mathematics Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development, 12.1,* 30–49.
Dreher, A., Kuntze, S. & Lerman, S. (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14,* 363–382.
Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall Ed.), Advanced mathematical thinking processes (pp. 25–41). New York: Kluwer Academic Publishers
Duit, R. & Treagust, D. F. (2003). Conceptual Change: a powerful framework for improving science teaching and learning. *International Journal of Science Education, 25,* 671–688.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *RSME, 9.1*, 143–168.
Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103–131.
Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23,* 297–319.
Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. & Lee, C. W. (2013). Mathematical Connections and Their Relationship to Mathematics Knowledge for Teaching Geometry. *School Science and Mathematics*, *113*(3), 120–134.
Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533–556.
Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula.* Unpublished dissertation, Pennsylvania State University College of Education. EE. UU.
Flick, U. (2014). *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis.* London, Thousand Oaks and Dehli: Sage.
Fujii, T. (2014) Misconception and alternative conceptions in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 453–455). USA: Springer.
Furinghetti, F. & Pehkonen, E. K. (2002). Rethinking Characterizations of Belief. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39–57). Dordrecht: Kluwer.
Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.
Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal Mathematics Teacher Education, 11*, 199–219.
Garbín, S. (2012). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 169–193.
García-García, J. & Dolores, C. (2016). Conexiones matemáticas entre la derivada y la integral: Una revisión de libros de texto de bachillerato. *Revista Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*(1), 325–333.
García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2017a). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* DOI: 10.1080/0020739X.2017.1355994
García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2017b). Conexiones matemáticas que establecen estudiantes de bachillerato al resolver tareas de derivada y de integral en el registro algebraico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30,* 525–533.
Garii, B. & Okumu, L. (2008). Mathematics and the World: What do Teachers Recognize as Mathematics in Real World Practice?" *The Montana Mathematics Enthusiast, 5*(2), 291–304.
Garner, B. E. & Garner, L. E. (2001). Retention of Concepts and Skills in Traditional and Reformed Applied Calculus. *Mathematics Education Research Journal, 13*(3), 165-184.
Glass, B. (2002). Students connecting mathematical ideas: possibilities in a liberal arts

mathematics class. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 75–85.
Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Universidad de Granada.
Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. pp. 517–545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Gómez, W. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía, 26*(75), 131–164.
Good, T., McCasilin, M., & Reys, B. (1992). Investigating work groups to promote problem solving in mathematics. In J Brophy (Ed.), *Planning and Managing Learning Tasks and Activities: Advances in research on teaching volumen 3* (pp. 115–160). Greenwich, Connecticut: JAI Press Inc.
Green, T. F. (1971). *The activities of teaching.* New York: McGraw-Hill.
Greeno, J. G., Collins, A. M. & Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 15–46). New York: MacMillan.
Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal for Mathematik-Didaktik*, *21*(2), 139–157.
Haciomeroglu, E. S. (2007). *Calculus students' understanding of derivative graphs problems of representations in calculus.* Unpublished dissertation. The Florida State University-Collegue of Education. United States of America.
Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L. y Presmeg, N. (2009). The role of reversibility in the learning of the calculus derivative and antiderivative graphs. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81–85). Atlanta, GA: Georgia State University.
Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 152–176.
Hackenberg, A. J. (2010). Students' Reasoning with Reversible Multiplicative Relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383–432.
Haddad, S. (2013). Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée? *Petit x*, 92, 7–32.
Harel, G. & Tall, D. (1989). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38–42.
Hatisaru, V. & Erbas, A. K. (2017). Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 703–722.
Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (pp. 65–79). New York: Macmillan.
Hiebert, J. & Lefevre, P. (2013). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Hong, Y. Y. & Thomas, M. O. J. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. *Mathematics Education Research Journal, 27,* 183–200.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* (A. Parsons & S. Milgram, Trans.). New York: Basic Books. (Original work published 1955)

Jaijan, W. & Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach, *HRD Journal*, *3*(1), 91–100.

Ji-Eun, L. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal Mathematics of Teacher Education, 15*, 429–452.

Johnson, P. E. (1997). Early Newtonian and Leibnizian development of the calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 28*(6), 803-816.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior, 32,* 122– 141

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, *38,* 9–28.

Kaplan, A., Ozturk, M., & Ocal M.F. (2015). Relieving of misconceptions of derivative concept with derive. *International Journal of Research in Education and Science, 1*(1), 64–74.

Karakoç, G. & Alacacı, C. (2015). Real World Connections in High School Mathematics Curriculum and Teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 6*(1), 31-46.

Kastberg, S. E. (2002). *Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function.* Unpublished dissertation, University of Georgia. EE. UU.

Kennedy, T. (2015). Addressing alternative conceptions in mathematics using discrepant events. In N. Davis, K. Manuel & T. Spencer (Eds.), *Proceedings of the 25th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers Inc.* (pp. 71–78), Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers Mathematics.

Kilpatrick, J. Hoyles, C., Skovsmose. O. & Valero, P. (2005). Meanings of meaning of mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 9–16). United States of America: Springer.

Koestler, C., Felton, M. D., Bieda, K. N. & Otten, S. (2013). *Connecting the NCTM Process Standards and the CCSSM Practices.* United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Koichu, B. & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 349–365

Kothari, C. R. (2004). *Research methodology: methods and techniques.* Indian: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Kouropatov, A. & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 641–651.

Kouropatov, A. & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education, 46,* 533–548.

Larson, R., Edwards, B. H. y Hostetler, R. P. (2002). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw-Hill.

Latas, J. & Moreira, D. (2013). Explorar conexões entre matemática local e matemática global. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 6*(3), 36–66.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 349–371.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1–64.

Libarkin, J. C. (2001). Assessing Students' Alternative Conceptions. *Journal of Geoscience Education*, *49*(4), 378–383.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*, 307–322.

Lucariello, J., Tine, M. T. & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 30–41.

Maier, H., & Steinbring, H. (1998). Begriffsbildung im alltäglichen Mathematikunterricht – Darstellung und Vergleich zweier Theorieansätze zur Analyse von Verstehensprozessen. *Journal fûr Mathematic Didaktik*, *19*(98), 292–329.

Makar, K. (2015). *Connecting Mathematics Within and Beyond the Horizon Through Inquiry-Based Pedagogies.* Consultado el 10 de agosto de 2015 de http://conversationsonkft.weebly.com/uploads/1/9/4/1/19412239/k._makar_2015_connecting_mathematics.pdf

Marshman, M. (2014). Using concept maps to show 'connections' in measurement: An example from the Australian Curriculum. *Australian Mathematics Teacher*, *70*(4), 11–20.

McGee, D. L. & Martinez-Planell, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*, 883–916.

Merriam, S. B. & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation*. United States of America: Jossey-Bass.

Mevarech Z. & Kramarsky B. (1997). From Verbal Description to Graphic Representation: Stability and Change in Students' Alternative Conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*(3), 229–263.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176–191.

Mhlolo, M. K., Venkat, H., & Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras*, *33*(1). Recuperado de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B. & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers' understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201–227.

Mora, E. & Del Río, M. (2009*). Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económico administrativas.* México: Santillana.

Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: the notion of "connected knowing". *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (pp. 377–384). Bergen: Bergen University College.
Mulhall, P. & Gunstone, R. (2012). Views About Learning Physics Held by Physics Teachers with Differing Approaches to Teaching Physics. *Journal of Science Teacher Education, 23*(5), 429–449.
Muzangwa, J. & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), 1–10.
Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education, 28*, 189–202.
Narjaikaewa, P. (2013). Alternative Conceptions of Primary School Teachers of Science about Force and Motion. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 88*(2013), 250–257.
NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* Nacional Council of Teachers of Mathematics: United State of America.
Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 203–233.
O'Shea, A., Breen, S. & Jaworski, B. (2016). The Development of a Function Concept Inventory. *International Journal Research in Undergraduate Mathematics Education,* 2, 279–296.
Özgen, K. (2013a). Problem çözme bağlaminda matematiksel ilişkilendirme becerisi: öğretmen adaylari örneği. *NWSA-Education Sciences, 8*(3), 323–345.
Özgen, K. (2013b). Self-Efficacy Beliefs In Mathematical Literacy And Connections Between Mathematics And Real World: The Case Of High School Students. *Journal of International Education Research, 9*(4), 305–316.
Özkan, E. M. & Ünal, H. (2009). Misconception in Calculus-I: Engineering students' misconceptions in the process of finding domain of functions. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*(2009) 1792–1796.
Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307–332.
Patterson, N. D. & Norwood, K. S. (2004). A case study of teacher beliefs on students' beliefs about multiple representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 5–23.
Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las ciencias, 31*(3), 121–134.
Pehkonen, E. K. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal fûr Mathematic Didaktik, 15*(3/4), 177–209.
Pehkonen, E. K., & Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the fourth congress of European Society for Research in Mathematics Education (CD/ROM).* University of Pisa.
Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-315). Reston, VA: NCTM.
Ponce-Campuzano, J. C. & Maldonado-Aguilar, M. A. (2014). The fundamental theorem of calculus within a geometric context based on Barrow's work. *International Journal of*

Mathematical Education in Science and Technology, 45(2), 293–303.
Ponce-Campuzano, J. C. (2013). Developing prospective mathematics teachers in Mexico: a lesson on the relationship between integration and differentiation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(7), 996–1006.
Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 163–182.
Radmehr, F. & Drake, M. (2017). Exploring students' mathematical performance, metacognitive experiences and skills in relation to fundamental theorem of calculus, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2017.1305129
Ramful, A. & Olive, J. (2008). Reversibility of thought: An instance in multiplicative tasks. *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 138–151.
Read, J. R. (2004). *Children's Misconceptions and Conceptual Change in Science Education.* Available from http://acell.chem.usyd.edu.au/Conceptual-Change.cfm
Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* (C. Valdés). URSS: Mir Moscú. (Trabajo original publicado en 1974).
Rösken, B. & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: the role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*, 181–204.
Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics*, 71,123–143
Sawyer, A. (2008). *Making Connections: Promoting Connectedness in Early Mathematics Education.* In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds). *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia* (pp. 429–435). Brisbane, QLD: MERGA
Schlöglmann, W. (2005). Mathematics learning without understanding–cognitive and affective background and consequences for mathematics education. In C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Måsøval & F. Rønning (Eds.). *Relating Practice and Research in Mathematics Education: Proceedings of NORMA 05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education* (pp. 441–454). Trondheim: Tapir Academic Press.
Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: what is necessary and sufficient? In S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 46–53.). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals, *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 230–245.
Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science*, *1*(1), 84–88.
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London; Washington, DC: The Falmer Press.
Silver, E.A., Mesa, V.M., Morris, K.A., Star, J., & Benken, B.M. (2009). Teaching mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American Educational Research Journal, 46*(2), 501–531.
Singletary, L. M, (2012). *Mathematical connections made in practice: an examination of teachers' beliefs and practices.* Unpublished dissertation. The University of Georgia. United States of America.
Soltani, S. H., Mohammad-Hassan, B., Shahvarani, A. & Manuchehri, M. (2013). Students'

Conception about the Relation of Mathematics to Real-Life. *Mathematics Education Trends and Research, 2013*(2013), 1–7.
Sparks, B. E., Brown, J. A. & Bassler, O. C. (1970). The Feasibility of Inducing Number Conservation through Training on Reversibility. *Journal for Research in Mathematics Education, 1*(3), 134–143.
Star, J. R (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-4011.
Stekete, S. & Scher, D. (2016). Connecting functions in Geometry and Algebra. *Mathematics Teacher, 109*(6), 448-455.
Stephen, J. P. & Mourat, A. T. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice, 40*(2), 118–127.
Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: conceptos y contextos.* México: CENGAGE Learning.
Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall Ed.), *Advanced mathematical thinking processes* (pp. 3-21). New York: Kluwer Academic Publishers
Thijs, G. D. & Berg, E. V. D. (1995). Cultural Factors in the Origin and Remediation of Alternative Conceptions in Physics. *Science and Education, 4,* 317–347.
Thomas, M. O. J., Druck, I. F., Huillet, D., Ju, M. K., Nardi, E., Rasmussen, C. & Xie, J. (2015). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 265–284). New York: Springer.
Thompson, P. W. & Dreyfus, T. (2016). A coherent approach to the Fundamental Theorem of Calculus using differentials. In R. Göller, R. Biehler & R. Hochsmuth (Eds.), *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (pp. 355–359). Hannover, Germany: KHDM.
Thompson, P. W. & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43–52). Washington, DC: Mathematical Association of America.
Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 229–274.
Treagust, D. F. & Duit, R. (2009). Multiple Perspectives of Conceptual Change in Science and the Challenges Ahead. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 32*(2), 89–104.
Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(5), 609–637.
Wenzelburger, E. (1993). Introducción a los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral: Una propuesta didáctica. *Revista Educación Matemática, 5*(3), 93-123.
Woolfolk, A. (2010). *Psicología educativa.* México: Prentice Hall.
Yoon, C., Dreyfus, T. & Thomas, M. O. J. (2010). How High is the Tramping Track? Mathematising and Applying in a Calculus Model-Eliciting Activity. *Mathematics Education Research Journal, 22*(1), 141–157.

Anexo. Artículos publicados durante el doctorado

García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2017). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2017.1355994

Dolores, C., **García-García, J.** & Gálvez-Pacheco, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Revista Educación Matemática, 29*(2), 125-158. DOI: 10.24844/EM2902.05

Dolores, C. & **García-García, J.** (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 158-180. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Dolores, C. & **García-García, J.** (2017). Concepciones de profesores de matemáticas acerca de la evaluación vistas a la luz de la reforma educativa actual en México. *Revista Paradigma, 38*(1), 186-210.

García-García, J. & Dolores, C. (2017). Conexiones intramatemáticas: El caso del Cálculo en estudiantes de bachillerato. *Foro de Estudios sobre Guerrero, 3*(4), 188-201.

García-García, J. & Dolores, C. (2017). Conexión entre derivada e integral en el registro algebraico en bachillerato. *Revista Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *1*(2). Aceptado para su publicación.

Valle-Zequeida, M. E., Martínez-Sierrra, G., **García-García, J.** & Dolores-Flores, C. (2017). Creencias de profesores de Matemáticas fuera del campo acerca de la evaluación de los aprendizajes. *Revista Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*(2). Aceptado para su publicación.

García-García, J. & Dolores, C. (2016). Conexiones matemáticas entre la derivada y la integral: Una revisión de libros de texto de bachillerato. *Revista Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*(1), 325-333.

García-García, J. & Dolores, C. (2016). Las conexiones matemáticas entre la derivada e integral: una revisión de la literatura educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29* (pp. 755-763). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Dolores, C. & **García-García, J.** (2016). Concepciones de Profesores de Matemáticas acerca de la Evaluación y las Competencias. *Revista Números, 92,* 71-92.

García-García, J. (2015). El sistema de numeración vigesimal: ¿cómo utilizarlo en el aula? *Revista Novedades Educativas*, 292, 76-79.

García-García, J., Navarro, C. & Rodríguez, F. M. (2015). Las estrategias utilizadas por los niños Tee Savi en la resolución de problemas aritméticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(2), 213-244. DOI: 10.12802/relime.13.1823